

Второе пересмотрѣнное и дополненное изданіе.

Е. И. Игнатьевъ.

ВЪ ЦАРСТВѢ СМЕКАЛКИ

или

АРИѲМЕТИКА ДЛЯ ВСѢХЪ

КНИГА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ.

СО МНОГИМИ РИСУНКАМИ И ЧЕРТЕЖАМИ ВЪ ТЕКСТѢ.

Книга третья

(послѣдняя).

2-е пересмотрѣнное и дополненное изданіе.

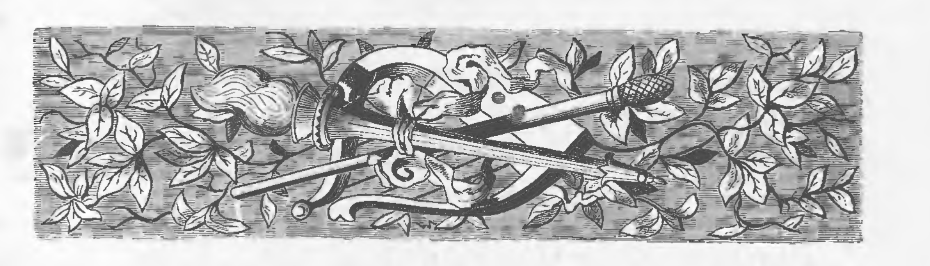
ПЕТРОГРАДЪ
1915

Тип. Т-ва А. С. Суворина — „Новое Время". Эртелевъ, 13.

ПРЕДИСЛОВІЕ КО 2-му ИЗДАНІЮ.

Помимо исправленія замѣченныхъ опечатокъ и промаховъ, а также общей редакціонной переработки, настоящее изданіе по сравненію съ первымъ значительно дополнено. Дополненія коснулись главнымъ образомъ свѣдѣній по Теоріи Вѣроятностей. Такъ, введена знаменитая теорія Якова Бернулли въ его собственномъ изложеніи, т. е. данъ переводъ IV и V-ой главъ изъ четвертой части его классическаго сочиненія «*Ars Conjectandi*»; прибавлена глава о рулеткѣ въ Монте-Карло и др. Точно также особенно внимательно пересмотрѣнъ и исправленъ отдѣлъ о счетныхъ машинахъ. Добавлены многіе портреты и рисунки. Словомъ, приложены всѣ усилія, чтобы и это новое изданіе книги нашло такой же благосклонный пріемъ среди широкой публики, какъ и предыдущее.

Петроградъ. 1915.



Нѣкоторыя историческія задачи.

Задача 1-я.

Одно изъ древнѣйшихъ математическихъ развлеченій.

Въ знаменитомъ Британскомъ музеѣ среди «коллекціи Ринда» находится египетскій папирусъ, который считается теперь чуть ли не самымъ древнимъ изъ извѣстныхъ нынѣ руководствъ по математикѣ. Папирусъ этотъ переведенъ Эйзенлоромъ на нѣмецкій языкъ въ 1877 г. Онъ написанъ египтяниномъ Ахмесомъ между 1700 и 2000 годами до Рождества Христова.

Подлинное заглавіе папируса таково:

«*Наставленіе къ пріобрѣтенію знанія всѣхъ тайныхъ вещей*».

Ахмесъ, въ свою очередь, упоминаетъ о томъ, что его книга написана на основаніи еще болѣе древнихъ сочиненій. Такимъ образомъ мы имѣемъ возможность судить о состояніи математическихъ знаній у древнихъ египтянъ, быть можетъ, за время не менѣе 5 000 лѣтъ до нашихъ дней. Почтенная давность!

«Египетская задача» и замѣтка «Начатки математики на Нилѣ», данныя во второй книгѣ «Въ царствѣ смекалки» (стр. 20 и 22), основаны именно на египетскомъ папирусѣ Ахмеса

изъ коллекціи Ринда. Но есть въ этомъ папирусѣ еще одно весьма любопытное мѣсто, надъ разгадкой котораго останавливалось не мало историковъ математики. Вотъ въ чемъ дѣло.

Ахмесъ даетъ **лѣстницу** такихъ 5-ти чиселъ:

7, 49, 343, 2401, 16807.

Рядомъ же съ этими числами стоятъ соотвѣтственно слова:

картина, *кошка*, *мышь*, *ячмень*, *мѣра*.

И все! Никакихъ дальнѣйшихъ поясненій, никакого ключа къ раскрытію смысла этой задачи папирусъ не даетъ. Что же это за задача?

Прежде всего замѣтимъ, что написанныя выше числа, составляющія *лѣстницу*, суть послѣдовательныя *степени* числа 7. Въ самомъ дѣлѣ, помножая послѣдовательно 7 само на себя одинъ, два, три, четыре и пять разъ и ставя рядомъ соотвѣтствующія слова, какъ въ рукописи Ахмеса, находимъ:

	7	. .	**картина**
$7 \times 7 = 7^2 =$	**49**	. .	**кошка**
$7 \times 7 \times 7 = 7^3 =$	**343**	. .	**мышь**
$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 =$	**2401**	. .	**ячмень**
$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5 =$	**16807**	. .	**мѣра**

Основываясь на такомъ сопоставленіи чиселъ и словъ, а также на нѣкоторыхъ позднѣйшихъ математическихъ сочиненіяхъ, ученый оріенталистъ Родэ и извѣстный историкъ математики Канторъ съ весьма большой вѣроятностью рѣшаютъ, что данное мѣсто папируса Ахмеса представляетъ такую задачу:

У нѣкоторыхъ семи лицъ имѣется по семи кошекъ. Каждая кошка съѣдаетъ по семи мышей, каждая мышь съѣдаетъ по семи колосьевъ ячменя, изъ каждаго колоса можетъ вырости по семи мѣръ зерна. Сколько всего предметовъ?

Складывая числа, составляющія *лѣстницу*, получаемъ въ отвѣтъ на вопросъ задачи число *19607*. Число мѣръ зерна (16807), спасаемыхъ всего 49-ю кошками, также весьма велико. Если догадки названныхъ выше ученыхъ вѣрны, то не даромъ,

пожалуй, у египтянъ кошка, истребительница мышей, считалась священнымъ животнымъ.

Задачи подобнаго рода могли предлагаться для забавы и для развитія сметки. Слѣдовательно, можно думать, что исторія математическихъ развлеченій также имѣетъ за собой почтенную давность по меньшей мѣрѣ въ 50 вѣковъ.

Только что приведенная древняя задача повторяется въ различныхъ варіантахъ въ разныя времена и у разныхъ народовъ. Нѣкоторые изъ этихъ варіантовъ, замѣчательнѣйшіе въ историческомъ отношеніи, приводятся сейчасъ ниже.

Задача 2-я.

Семь старухъ.

Приблизительно черезъ 3 000 лѣтъ послѣ появленія папируса Ахмеса, а именно въ 1202 году послѣ Р. Х., Леонардъ изъ Пизы (онъ же *Фибоначчи*, или *Фибоначи*) издалъ на латинскомъ языкѣ сочиненіе *Liber abaci*, содержащее въ себѣ всю совокупность тогдашнихъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ знаній.

Въ этой книгѣ имѣется, между прочимъ, такая задача:

Семь старухъ отправляются въ Римъ. У каждой старухи по семи муловъ, каждый мулъ несетъ по семи мѣшковъ, въ каждомъ мѣшкѣ по семи хлѣбовъ, въ каждомъ хлѣбѣ по семи ножей, каждый ножъ въ семи ножнахъ. Сколько всего предметовъ?

Рѣшеніе.

Задача отличается отъ Ахмесовой только тѣмъ, что къ пяти числамъ *лѣстницы* Ахмеса надо прибавить еще шестое число, равное семи, повторенному множителемъ 6 разъ, т. е. $7^6=117\,649$.

Всего получится $7+7^2+7^3+7^4+7^5+7^6=137\,256$ предметовъ.

Задача 3-я.

По дорогѣ въ St.-Ives.

Въ 1801 году въ Соединенныхъ Штатахъ Америки вышло 1-е изданіе *Школьной ариѳметики* (Scholar's Arithmetic) Даніила Адамса, пользовавшейся тамъ большимъ распространеніемъ въ началѣ 19-го вѣка. Варіантъ Ахмесовой задачи изложенъ въ этой ариѳметикѣ уже въ такихъ англійскихъ стихахъ:

As I was going to St.-Ives,
I met seven wives;
Every wife had seven sacks;
Every sack had seven cats;
Every cat had seven kits:
Kits, cats, sacks and wives,
How many were going to St.-Ives?

Если попробовать это же передать «школьными стихами» по-русски, получимъ:

Въ Сентъ-Айвзъ какъ-то я шагалъ;
Я семь женщинъ повстрѣчалъ;
И у каждой семь мѣшковъ,
А въ мѣшкахъ по семь котовъ;
При котахъ по семь котятъ.
Сколько всѣхъ придти хотятъ
Въ Сентъ-Айвзъ: женщинъ и мѣшковъ,
И котятокъ, и котовъ?

Рѣшить задачу предоставляемъ читателю. Послѣ двухъ предыдущихъ задачъ рѣшеніе очевидно.

Задача 4-я.

Русская народная задача.

Для нашего читателя, быть можетъ, интересно будетъ узнать, что изъ мрака отдаленнѣйшихъ временъ отголоски за-

дачи Ахмеса перешли также и въ русскій народный эпосъ. Существуетъ русская народная задача о нищихъ (или старцахъ), о которой упоминаетъ П. А. Износковъ въ своемъ докладѣ «о памятникахъ народной математики», прочитанномъ въ 1884 г. въ казанскомъ обществѣ естествоиспытателей. Задачу эту авторъ сообщенія слышалъ въ Казанской губ.

И. Ю. Тимченко въ своихъ примѣчаніяхъ къ русскому переводу «Исторіи элементарной математики» проф. Ф. Кэджори приводитъ эту задачу такъ, какъ она распространена среди населенія Орловской губ.:

Шли семь старцевъ.
У каждаго старца по семи костылей,
На всякомъ костылѣ по семи сучковъ,
На каждомъ сучкѣ по семи кошелей,
Въ каждомъ кошелѣ по семи пироговъ,
А въ каждомъ пирогѣ по семи воробьевъ.
Сколько всего?

Рѣшеніе.

Задача требуетъ опредѣленія числа всѣхъ предметовъ, т. е. старцевъ, костылей, сучковъ, кошелей, пироговъ и воробьевъ. Рѣшеніе, очевидно, дается числомъ $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6$, приведеннымъ нами уже въ задачѣ 2-й (стр. 3).

Интересно отмѣтить, что во всѣхъ четырехъ предыдущихъ задачахъ главную роль играетъ число *семь*. Въ главѣ «о числовыхъ суевѣріяхъ» мы увидимъ, что число это имѣло у различныхъ народовъ особое символическое, священное значеніе. Быть можетъ, раньше, чѣмъ сдѣлаться предметомъ простого развлеченія или развитія народной смекалки, задачи подобнаго рода носили миѳологическій, астрологическій или религіозный характеръ.

Задача 5-я.

Жизнеописаніе Діофанта.

Прохожій! Подъ этимъ камнемъ покоится прахъ Діофанта, умершаго въ преклонныхъ годахъ. $^1/_6$ часть своей продолжительной жизни онъ провелъ въ дѣтствѣ, $^1/_{12}$—въ юности. Слѣдующую затѣмъ $^1/_7$ своей жизни онъ былъ холостымъ. Черезъ пять лѣтъ послѣ его женитьбы у него родился сынъ, дожившій до возраста вдвое меньшаго, чѣмъ лѣта его отца. Черезъ четыре года послѣ смерти сына умеръ и Діофантъ, оплакиваемый родными.—Скажи, если умѣешь считать, въ какомъ возрастѣ онъ умеръ?

Высчитать, что Діофантъ дожилъ до 84-хъ-лѣтняго возраста, не составляетъ особаго труда. Но задача эта имѣетъ спеціальный историческій интересъ. Существуютъ свидѣтельства, что она служила дѣйствительно надгробной эпитафіей надъ прахомъ одного изъ замѣчательнѣйшихъ математиковъ древности, о жизни котораго *только почти и имѣется свѣдѣній, что эта задача.*

Діофантъ былъ совершенно исключительный математикъ послѣдняго періода знаменитой александрійской школы. О времени и мѣстѣ его рожденія, а также о его происхожденіи мы ничего не знаемъ. Предполагаютъ съ нѣкоторой долей вѣроятности, что онъ умеръ около 330 года по Р. Х. Другіе для времени его жизни даютъ дату 325—409 г. по Р. Х. Діофантъ считается родоначальникомъ современной алгебры и занимаетъ въ ряду великихъ греческихъ математиковъ совершенно исключительное мѣсто. Вотъ что говоритъ о немъ проф. Ф. Кэджори (Cajori) въ своей «Исторіи элементарной математики»: «Если бы сочиненія его не были написаны по-гречески, никто и не подозрѣвалъ бы, что они произведенія греческаго ума. Его главное, образцовое произведеніе, «Ариѳметика» [написанное, какъ

творятъ, въ 13-ти книгахъ, изъ коихъ только шесть дошли до насъ] проникнуто духомъ, настолько отличнымъ отъ духа великихъ классическихъ сочиненій, написанныхъ во времена Эвклида, насколько чистая геометрія отличается отъ чистаго анализа. Между греками у Діофанта не было ни одного выдающагося предшественника, ни одного выдающагося послѣдователя. Не будь его сочиненій, намъ пришлось бы сказать, что греческій умъ не создалъ въ области алгебры ничего замѣчательнаго. До открытія папируса Ахмеса *Ариѳметика* Діофанта была древнѣйшимъ извѣстнымъ намъ трудомъ по Алгебрѣ».

Задача 6-я (Архимеда).

О числѣ песчинокъ (Псаммитъ).

Задача эта, предложенная и разрѣшенная Архимедомъ (287—212 до Р. Х.), изложена имъ въ формѣ обращенія къ Гелону, сыну Гіерона, тирану города Сиракузъ. Главнѣйшій интересъ ея состоитъ въ томъ, что знаменитый философъ древности показалъ, какъ расширить несовершенную греческую систему счисленія, распространивъ ее на сколь угодно большія числа. Вотъ какъ излагаетъ свою задачу Архимедъ:



Архимедъ.

Нѣкоторые люди, о царь Гелонъ, воображаютъ, что число песчинокъ безконечно велико. Я говорю не о пескѣ, находящемся въ Сиракузахъ или во всей Сациліи, но о пескѣ всей суши, какъ обитаемой, такъ и необитаемой. Другіе признаютъ это число, правда, не неограниченнымъ, но все же думаютъ, что оно больше всякаго

задуманнаго числа. Если бы эти люди представили себѣ кучу песку, величиною въ земной шаръ, при чемъ этимъ пескомъ были бы покрыты всѣ моря и всѣ углубленія до вершины высочайшихъ горъ, то, конечно, эти люди тѣмъ болѣе были бы склонны принять, что нѣтъ числа, превосходящаго число песчинокъ въ этой кучѣ.

Я, однако, приведу доказательства, съ которыми и ты согласишься, что я въ состояніи назвать нѣкоторыя числа, не только превосходящія число песчинокъ въ кучѣ, равной земному шару, но даже число песчинокъ въ кучѣ, равной всей вселенной.

Рѣшеніе.

Ты знаешь, конечно, что подъ *вселенной* большинство астрономовъ подразумѣваетъ шаръ, центръ котораго находится въ центрѣ Земли, а радіусъ образуется разстояніемъ между центрами Земли и Солнца. Въ своемъ сочиненіи противъ астрономовъ Аристархъ Самосскій пытается опровергнуть это и доказать, что вселенная составляетъ кратное этой величины. Онъ приходитъ къ выводу, что звѣзды и Солнце неподвижны, тогда какъ Земля вращается вокругъ Солнца по кругу, въ центрѣ котораго стоитъ Солнце [1]). Согласимся, что діаметръ сферы неподвижныхъ звѣздъ относится къ діаметру вселенной, понимаемой въ томъ смыслѣ, какъ это понимаетъ большинство астрономовъ, (т. е. солнечной системы), какъ этотъ послѣдній къ діаметру Земли. Я утверждаю, что если бы существовала песочная куча даже величиною въ Аристархову звѣздную сферу, то и въ этомъ случаѣ я могу привести число, даже превышающее число песчинокъ въ такой воображаемой сферѣ.

---

[1]) Аристархъ, родившійся въ Самосѣ около 270 г. до Р. Х., уже за $1\frac{1}{2}$ тысячи лѣтъ до Коперника, какъ это видно изъ только что приведенныхъ словъ Архимеда, совершенно ясно выразилъ основанія геліоцентрической системы. Изъ его сочиненій сохранилось только одно: «О величинахъ и разстояніяхъ Солнца и Луны».

Предполагаю слѣдующее:

1) *Окружность Земли менѣе 3 милліоновъ стадій* (стадія приблизительно равна нынѣшнимъ 185 метрамъ).

Какъ тебѣ извѣстно, были попытки доказать, что окружность Земли составляетъ около 300.000 стадій [1]); но я превзойду предшественниковъ и приму для нея въ десять разъ большее число.

2) *Солнце больше Земли, а Земля больше Луны.*

Въ этомъ я согласуюсь съ большинствомъ астрономовъ [2]).

3) *Поперечникъ Солнца не болѣе, чѣмъ въ 30 разъ, превышаетъ поперечникъ Луны* [3]).

4) *Діаметръ Солнца больше, нежели сторона тысячеугольника, вписаннаго въ наибольшій кругъ небесной сферы.*

Это я принимаю по Аристарху, который считаетъ, что видимые размѣры Солнца составляютъ $\frac{1}{720}$ размѣровъ задіакальнаго круга. Я самъ измѣрялъ уголъ, подъ которымъ видно Солнце, но точное измѣреніе этого угла не легко произвести, ибо ни глазъ, ни рука, ни измѣрительные приборы не достаточно надежны. Но здѣсь не мѣсто объ этомъ распространяться. Достаточно только знать, что этотъ уголъ меньше, чѣмъ $\frac{1}{164}$, и больше, чѣмъ $\frac{1}{300}$ прямого угла [4]).

На основаніи допущеній 2) и 3) діаметръ Солнца меньше, чѣмъ 30 земныхъ діаметровъ. Поэтому, по допущенію 4, периметръ тысячеугольника, вписаннаго въ одинъ изъ наибольшихъ круговъ небесной сферы, меньше, чѣмъ 30 000 земныхъ діаметровъ. Но если это такъ, то діаметръ вселенной (т. е. согласно Аристарху солнечной системы) меньше 10 000 земныхъ

---

[1]) Эратосѳенъ (отъ 275—194 до Р. Х.), произведшій первое градусное измѣреніе, опредѣлилъ окружность Земли въ 250 000 стадій, однако, неизвѣстно, о какихъ стадіяхъ онъ писалъ—о греческихъ или египетскихъ.

[2]) Согласно вычисленію Аристарха, Солнце въ 7 000 разъ больше Земли, а Луна въ 27 разъ меньше.

[3]) Въ дѣйствительности діаметръ Солнца почти въ 400 разъ больше діаметра Луны.

[4]) Т.-е. заключается между 27′ и 33′; $\frac{1}{164} R = 33°$; $\frac{1}{200} R = 27°$; по измѣреніямъ помощью новѣйшихъ геліометровъ, средній видимый діаметръ Солнца составляетъ около 32′, что ближе къ высшему предѣлу, указываемому Архимедомъ.

діаметровъ; ибо только для правильнаго шестиугольника, діаметръ равенъ $\frac{1}{3}$ периметра, а для всякаго многоугольника діаметръ меньше $\frac{1}{3}$ периметра.

По первому предположенію, окружность Земли меньше 3 милл. стадій; стало быть, діаметръ меньше 1 милл. стадій, такъ какъ діаметръ окружности меньше $\frac{1}{3}$ длины ея. Стало быть, также и діаметръ вселенной меньше, чѣмъ 10 000 милліоновъ стадій.

Допустимъ теперь, что песчинки до того малы, что 10 000 такихъ песчинокъ составляютъ лишь величину одного маковаго зерна. Я приму діаметръ маковаго зерна въ $\frac{1}{40}$ дюйма. Въ одномъ изъ моихъ опытовъ, уже 25 маковыхъ зеренъ, положенныхъ рядомъ по прямой, заняли дюймъ, но я желаю обезпечить свое доказательство противъ всякихъ возраженій.

У насъ (грековъ) существуютъ названія чиселъ лишь до миріады [1] ($10\,000 = 10^4$). Считаемъ мы, однако, и до 10 000 миріадъ ($10^4 \cdot 10^4 = 10^8$). Чтобы пойти еще далѣе, примемъ 10 000 миріадъ (10^8) за единицу второго порядка и возьмемъ ее снова 10 000 миріадъ разъ, то получимъ $10^8 \cdot 10^8 = 10^{8 \cdot 2}$, или единицу третьяго порядка. Точно также можемъ взять 10 000 миріадъ разъ полученную единицу третьяго порядка и получимъ единицу четвертаго порядка ($10^{8 \cdot 3}$) и т. д. $10^{56} = 10^{8 \cdot 7}$ будетъ представлять единицу восьмого порядка, 1 же есть единица перваго порядка.

Теперь вычислимъ, сколько песчинокъ, миріада которыхъ занимаетъ объемъ маковаго зерна, помѣстится въ шарѣ съ діаметромъ, равнымъ дюйму? По нашему предположенію, діаметръ маковаго зерна равняется $\frac{1}{40}$ дюйма, но по извѣстному геометрическому положенію объемы шаровъ относятся, какъ кубы ихъ діаметровъ, стало быть, въ данномъ случаѣ, какъ $1^3 : 40^3 = 1 : 64\,000$. Итакъ, шаръ одного дюйма въ діаметрѣ содержитъ 64 000 маковыхъ зеренъ или 64 000 миріады песчинокъ, т. е. $64 \cdot 10^8$, что меньше, чѣмъ $10 \cdot 10^8 = 10^9$ песчинокъ. Шаръ 100 дюймовъ въ діаметрѣ относится къ шару 1 дюйма

[1]) Въ дальнѣйшемъ мы будемъ примѣнять систему изображенія чиселъ при помощи 10 въ извѣстной степени, такъ какъ Архимедовъ способъ выраженія не такъ удобопонятенъ.

въ діаметрѣ (по объему), какъ $100^3 : 1^3$, или $10^6 : 1$. Итакъ, песочный шаръ 100 д. въ діаметрѣ, очевидно, содержитъ не болѣе $10^6 \cdot 10 \cdot 10^8$ песчинокъ.

Шаръ 10 000 дюймовъ въ діаметрѣ содержитъ не болѣе $10^{21} = 10 \cdot 10^4 \cdot 10^{16}$, т. е. десяти миріадъ единицъ нашего третьяго порядка.

Но такъ какъ стадія меньше 10 000 дюймовъ, то ясно, что песочный шаръ, съ діаметромъ въ стадію, содержитъ менѣе 10 миріадъ единицъ третьяго порядка.

Точно такимъ же образомъ найдемъ, что шаръ съ діаметромъ въ 10^2 стадій содержитъ меньше чѣмъ $1000 \cdot 10^{8 \cdot 3}$ песчинъ

въ 10^4.	$10 \cdot 10^{8 \cdot 4}$
» 10^6.	$10^6 \cdot 10 \cdot 10^{8 \cdot 4}$
» 10^8.	$10 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 5}$
» 10^{10}.	$1000 \cdot 10^{8 \cdot 6}$

Но 10^{10} есть 10 000 милліоновъ стадій. Такъ какъ діаметръ вселенной меньше 10 000 милліоновъ стадій; стало быть, вселенная содержитъ песчинокъ менѣе, нежели $1000 \cdot 10^{8 \cdot 6}$. Далѣе. Діаметръ Аристарховой сферы неподвижныхъ звѣздъ заключаетъ въ себѣ столько разъ діаметръ вселенной (10 000 милліоновъ стадій), сколько разъ въ этомъ послѣднемъ содержится діаметръ Земли (1 милліонъ стадій), и выходитъ, что сфера Аристарха (неподвижныхъ звѣздъ) относится къ сферѣ вселенной, какъ $10^{12} : 1$, а стало быть, содержитъ песчинокъ менѣе, чѣмъ 1 000 миріадъ единицъ восьмого порядка

$$1000 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 7} = 10^{63}.$$

Это, царь Гелонъ, можетъ показаться невѣроятнымъ толпѣ и всѣмъ несвѣдущимъ въ математикѣ; но тѣ, которые обладаютъ математическими познаніями и умѣютъ размышлять о разстояніяхъ и величинѣ Земли, Солнца, Луны и всего мірозданія, признаютъ это за доказанное. Поэтому я счелъ не неумѣстнымъ предпринять это изслѣдованіе.

Въ ряду другихъ работъ великаго геометра Сиракузъ разсужденіе о числѣ песчинокъ («Псаммитъ»—по-гречески) занимаетъ сравнительно второстепенное мѣсто. Но и эта небольшая работа,—«нѣсколько размышленій», какъ говоритъ самъ Архимедъ,—даетъ достаточное понятіе о мощи генія этого человѣка. Предъ нами въ простой и наглядной формѣ лежитъ въ сущности изложеніе десятичной системы. Введи только Архимедъ систему помѣстнаго значенія цифръ да... нуль, и дальше некуда идти!... Представляется удивительнымъ, что это открытіе ускользнуло отъ его проницательности. Или же этотъ геній величественно пренебрегалъ всѣмъ тѣмъ, что такъ упрощаетъ и облегчаетъ работу намъ, обыкновеннымъ смертнымъ?

Задача 7-я.

Юридическій вопросъ.

Древніе римляне ничего или почти ничего не сдѣлали для развитія математическихъ наукъ. Они извѣстны болѣе въ области законодательства. Дошедшія до насъ римскія математическія сочиненія носятъ преимущественнно чисто практическій, утилитарный характеръ. Такъ, напримѣръ, поводъ къ составленію ариѳметическихъ задачъ давали римскіе *законы о наслѣдствѣ*. Вотъ одна изъ такихъ дошедшихъ до насъ задачъ.

Нѣкто, умирая, оставилъ жену въ ожиданіи ребенка и сдѣлалъ такое завѣщаніе: въ случаѣ рожденія сына отдать ему $^2/_3$ оставленнаго имущества, а $^1/_3$ матери. Въ случаѣ же рожденія дочери—она должна получить $^1/_3$, а мать $^2/_3$ имущества. Вдова завѣщателя родила близнецовъ, мальчика и дѣвочку. Какъ раздѣлить имущество, чтобы удовлетворить условіямъ завѣщанія?

Рѣшеніе.

Задачу эту, представляющую такъ называемый «юридическій казусъ», рѣшилъ, между прочимъ, знаменитый римскій юристъ Сальвіанъ Юліанъ. Рѣшеніе его состоитъ въ томъ, что

имущество должно быть раздѣлено на *семь* равныхъ частей. Четыре изъ этихъ частей должны перейти къ сыну, двѣ—къ женѣ и одна къ дочери. Предлагаемъ читателю рѣшить эту задачу на основаніи не юридическихъ, а математическихъ соображеній.

Индусскія задачи.

Индусамъ, какъ утверждаютъ иные, мы обязаны нашей системой письменнаго счисленія и введеніемъ нуля, т. е. открытіями, имѣющими величайшее значеніе въ исторіи развитія математическихъ наукъ. Вообще, въ свое время индусы довели искусство вычисленій до такой степени совершенства, которой не достигалъ ни одинъ изъ ранѣе ихъ жившихъ народовъ. Особенности національнаго склада этого народа отразились и на дошедшихъ до насъ его математическихъ сочиненіяхъ. Послѣднія обыкновенно написаны стихами и часто полны темныхъ и мистическихъ выраженій. Съ другой стороны, задачи, составленныя въ легкой и пріятной стихотворной формѣ и предлагаемыя въ качествѣ загадокъ, были любимымъ развлеченіемъ индусовъ. «Эти задачи,—говоритъ индусскій астрономъ Брахмагупта (конецъ 6-го и начало 7-го вѣка по Р. Х.),—предлагаются просто для забавы. Мудрый человѣкъ можетъ придумать тысячу другихъ, или можетъ рѣшатъ задачи, предложенныя ему другими по изложеннымъ здѣсь правиламъ. Какъ Солнце затмеваетъ звѣзды своимъ блескомъ, такъ и ученый человѣкъ можетъ затмить славу другихъ въ народныхъ собраніяхъ, предлагая алгебраическія задачи и, тѣмъ болѣе, рѣшая ихъ».

Въ сочиненіи *Сиддхантасиромани* («Вѣнецъ астрономической системы»), написанномъ индусскимъ ученымъ Бхаскара Ачарья въ 1150 году, есть двѣ главы, посвященныя спеціально математикѣ. Одна глава носитъ заглавіе *Лилавати*, т. е. «прекрасная» (въ смыслѣ «благородная наука»), а другая—*Виджа-Ганита*, т. е. «извлеченіе корней». Вотъ примѣръ задачъ, взятыхъ изъ этихъ главъ.

Задача 8-я.

Прекрасная дѣва съ блестящими очами, ты, которая знаешь, какъ правильно примѣнять методъ инверсіи, скажи мнѣ величину такого числа, которое, будучи умножено на 3, затѣмъ увеличено на $^3/_4$ этого произведенія, раздѣлено на 7, уменьшено на $^1/_3$ частнаго, умножено само на себя, уменьшено на 52, послѣ извлеченія квадратнаго корня, прибавленія 8 и дѣленія на 10 дастъ число 2?

Рѣшеніе.

Указаніе на способъ рѣшенія заключается въ самомъ условіи задачи. Предполагается, что дѣвушка умѣетъ правильно примѣнять *методъ инверсіи*». Инверсіей называется такой способъ рѣшенія задачи, при которомъ начинаютъ съ послѣдняго числа задачи, такъ сказать, «съ конца», и идутъ въ *обратномъ* порядкѣ, производя дѣйствія также *обратныя* названнымъ въ задачѣ.

Такъ, напримѣръ, въ данной задачѣ отправляемся отъ числа два и идемъ къ искомому числу слѣдующимъ путемъ:

2	множимъ на	10,	получаемъ	20;
Отъ 20	отнимаемъ	8	»	12;
12	множимъ на	12 [1])	»	144;
Къ 144	прибавляемъ	52	»	196;
Изъ 196	извлекаемъ квадратный корень		»	14;
Отъ 14	беремъ	$\frac{3}{2}$	»	21;
21	множимъ на	7	»	147;
Отъ 147	беремъ	$\frac{4}{7}$	»	84;
84	дѣлимъ на	3	»	**28.**

[1]) Т. е. *возвышаемъ въ квадратъ* ($12 \times 12 = 12^2$). Дѣйствіе, обратное *извлеченію квадратнаго корня.*

28 и есть искомое число. То же рѣшеніе при системѣ нашихъ обозначеній можно написать въ одной строкѣ:

$$(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196; \sqrt{196} = 14; \; 14 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7} : 3 = 28.$$

Древнѣйшій изъ извѣстныхъ намъ индусскихъ математиковъ (V-й вѣкъ по Р. Х.) *Арьябхатта* объясняетъ способъ инверсіи съ такой характерной краткостью:

«Умноженіе становится дѣленіемъ, дѣленіе становится умноженіемъ. Прибыль обращается въ убытокъ, убытокъ въ прибыль; инверсія».

Тотъ же Арьябхатта предлагаетъ въ ряду прочихъ и нижеслѣдующую «практическую» для индусовъ задачу:

Задача 9-я.

Цѣна рабыни.

Шестнадцатилѣтняя дѣвушка-рабыня стоитъ 32 нишка (индусская монета). Что стоитъ рабыня 20-ти лѣтъ?

Рѣшеніе.

Рѣшеніе этой любопытной для насъ по условію задачи не отличается само по себѣ ничѣмъ особеннымъ. Но исторически оно доказываетъ, что индусы уже не позже V-го вѣка были хорошо знакомы съ такъ называемымъ у насъ «тройнымъ правиломъ», равно какъ, кстати сказать, были знакомы и со многими другими «правилами» рѣшеній задачъ, до сихъ поръ еще часто безъ нужды обременяющими наши учебные курсы.

Въ частности при рѣшеніи задачи о цѣнѣ рабыни Арьябхатта руководствуется началомъ «обратной пропорціи», потому что, говоритъ онъ, «стоимость живыхъ существъ (рабовъ и скота) устанавливается сообразно ихъ возрасту»,—чѣмъ старше, тѣмъ дешевле.

На такомъ основаніи выходитъ, что если 16-лѣтняя рабыня стоитъ 32 нишка (индусская монета), то однолѣтняя будетъ

стоить въ 16 разъ больше, т. е. 32×16 нишка, а 20-лѣтняя въ 20 разъ меньше послѣдней суммы, т. е. $\frac{32 \times 16}{20} = 25\frac{3}{5}$ нишка.

Приведемъ еще двѣ индусскія задачи, въ которыхъ говорится о болѣе веселыхъ и безобидныхъ вещахъ, чѣмъ о продажѣ человѣка человѣкомъ. Обѣ задачи взяты изъ сочиненій уже упомянутаго нами Бгаскары. Рѣшеніе ихъ, особенно для лицъ, знакомыхъ съ квадратными уравненіями, не представляетъ ни малѣйшаго затрудненія. Поэтому приводимъ только отвѣты.

Задача 10-я.

Пчелы.

Пчелы въ числѣ, равномъ корню квадратному изъ половины роя, слетѣли на кустъ жасмина. $^8/_9$ всего роя осталось дома. Одна пчела-самка летаетъ вокругъ цвѣтка лотоса. Тамъ жужжитъ неосторожный самецъ, привлеченный сладкимъ запахомъ цвѣтка и теперь заключенный внутри его. Скажи мнѣ число пчелъ?

Отвѣтъ: 72.

Задача 11-я.

Обезьяны.

Стая обезьянъ забавлялась. Одна восьмая часть въ квадратѣ ихъ бѣгала по лѣсу. Остальныя 12 кричали на верхушкѣ холма. Скажи мнѣ число обезьянъ?

Отвѣтъ: 16 или 48.

Задачи Ньютона.

Выше приведены нѣкоторыя задачи, по тѣмъ или инымъ причинамъ извѣстныя въ исторіи развитія математическихъ знаній. Было бы нѣсколько страннымъ обойти при этомъ молчаніемъ нѣкоторыя задачи великаго Ньютона, хотя они далеко не носятъ характера общедоступности.

Въ первые девять лѣтъ своей профессуры въ Кэмбриджскомъ университетѣ Ньютонъ читалъ лекціи по алгебрѣ. Лекціи эти подъ заглавіемъ «*Arithmetica Universalis*» («Всеобщая Ариѳметика») были опубликованы Уистономъ (Whiston) въ 1707 году. По многочисленности входящихъ въ нихъ задачъ можно судить, что великій теоретикъ и пролагатель новыхъ путей въ математикѣ прекрасно сознавалъ развивательное значеніе чисто практическихъ задачъ. Объ этомъ онъ и самъ говоритъ въ своей «Ариѳметикѣ»: «Я показалъ выше рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ, такъ какъ при изученіи наукъ примѣры полезнѣе правилъ» («In scientiis enim addiscendis prosunt exempla magis quam praecepta»).

Слѣдующія сейчасъ двѣ задачи можно считать самыми извѣстными изъ Ньютоновскихъ задачъ. Для рѣшенія ихъ мало одной хотя бы и самой быстрой сообразительности, а необходима еще нѣкоторая математическая подготовка. охватывающая, впрочемъ, только знаніе квадратныхъ уравненій и первыя ступени неопредѣленнаго анализа. Предполагая, что только такой читатель заинтересуется этими задачами серьезно, мы даемъ ихъ рѣшеніе, не входя въ подробности.

Задача 12-я.

Быки на лугу.

На лугу, площадь котораго равна $3\frac{1}{2}$ акрамъ, пасутся въ продолженіе 4 недѣль 12 быковъ и за это время съѣдаютъ какъ ту траву, что была раньше, такъ и ту, что подростала во все это время равномѣрно. На другомъ лугу, площадь котораго равна 10 акрамъ, пасутся въ продолженіе 9 недѣль 21 быкъ и также съѣдаютъ какъ ту траву, что была раньше, такъ и ту, что подростала во все это время равномѣрно. Сколько нужно пустить быковъ на третій лугъ, площадь котораго равна 24 акрамъ, чтобы они въ продолженіе 18 недѣль съѣли

какъ ту траву, что на немъ есть, такъ и ту, которая будетъ подростать во все это время равномѣрно?

Примѣчаніе. Предполагается, что высота травы на всѣхъ трехъ лугахъ до выгона на нихъ быковъ одинакова, и что ростъ травы на всѣхъ трехъ лугахъ за одинъ день—одинаковъ.

Рѣшеніе.

Рѣшеніе, наиболѣе быстро приводящее къ цѣли, требуетъ введенія *новыхъ вспомогательныхъ неизвѣстныхъ.* Поэтому обозначимъ искомое число быковъ черезъ x; пусть y есть первоначальная высота травы на лугахъ и пусть на всѣхъ трехъ лугахъ трава подростаетъ ежедневно на z. Тогда количества травы (по объему), съѣденныя быками на трехъ лугахъ, выразятся соотвѣтственно черезъ:

$$3^1/_3(y+7\cdot 4z);\quad 10(y+7\cdot 9z);\quad 24(y+7\cdot 18z).$$

Слѣдовательно, одинъ быкъ съѣдалъ за одинъ день на каждомъ лугу соотвѣтственно травы (по объему):

$$\frac{3^1/_3(y+7\cdot 4z)}{12\cdot 7\cdot 4};\quad \frac{10(y+7\cdot 9z)}{21\cdot 7\cdot 9};\quad \frac{24(y+7\cdot 18z)}{x\cdot 7\cdot 18}.$$

Отсюда имѣемъ два уравненія:

$$\frac{10(y+28z)}{3\cdot 12\cdot 7\cdot 4}=\frac{10(y+63z)}{21\cdot 7\cdot 9}=\frac{24(y+126z)}{x\cdot 7\cdot 18}$$

или

$$\frac{5(y+28z)}{16}=\frac{5(y+63z)}{21}=\frac{12(y+126z)}{2x}.$$

Изъ уравненія

$$\frac{5(y+28z)}{16}=\frac{5(y+63z)}{21}$$

имѣемъ: $y=84z$.

Подставивъ это значеніе y въ уравненіе

$$\frac{5(y+28z)}{16}=\frac{12(y+126z)}{2x},$$

находимъ, что $x=36$.

Итакъ, на третій лугъ нужно пустить **36** быковъ.

Задача 13-я.

Глубина колодца.

Камень падаетъ въ колодецъ. Опредѣлить глубину колодца по звуку, происходящему отъ удара камня о дно.

Рѣшеніе.

Если обозначить черезъ x глубину колодца и затѣмъ условиться, что камень проходитъ пространство a во время b, а звукъ то же пространство во время d, что время отъ начала паденія камня до получаемаго ухомъ звука отъ его удара о дно есть t, то рѣшеніе задачи приводитъ къ квадратному уравненію

$$x^2 - \frac{2adt + ab^2}{d^2} x + \frac{a^2 t^2}{d^2} = 0.$$

Для нахожденія отвѣта для каждаго частнаго случая необходимо знать законы свободнаго паденія тѣлъ и скорость распространенія звука.

Къ приведеннымъ задачамъ прибавимъ еще слѣдующую, взятую изъ англійскаго сборника за 1742 годъ («Miscellany of Mathematical Problems»).

Задача остроумна по условію и рѣшается сравнительно просто. Изъ вышеуказаннаго сборника она перешла во многіе задачники и руководства.

Задача 14-я.

Кто на комъ женатъ?

Трое крестьянъ, Иванъ, Петръ и Алексѣй, пришли на рынокъ со своими женами: Марьей, Екатериной и Анной. Кто на комъ женатъ, намъ неизвѣстно. Узнать это на основаніи такихъ соображеній: каждое изъ этихъ 6-ти лицъ заплатило за каждый купленный пред-

метъ столько копѣекъ, сколько предметовъ оно купило. Каждый мужчина истратилъ на 63 копѣйки больше своей жены. Кромѣ того. Иванъ купилъ 23-мя предметами больше Катерины, а Петръ 11-ю предметами больше Марьи.

Рѣшеніе.

Если одинъ изъ мужчинъ купилъ, скажемъ, x предметовъ, то по условію задачи онъ заплатилъ за нихъ x^2 коп. Если его жена купила y предметовъ, то она заплатила за нихъ y^2 коп. Разница $x^2 - y^2 = 63$, но $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, т. е. $(x+y)(x-y) = 63$.

Числа $x+y$ и $x-y$ найдемъ, разложивъ 63 на два цѣлыхъ множителя; но $63 = 3^2 \cdot 7$, и разложеніе возможно на три манеры: 63×1, 21×3, 9×7, откуда ур-нія

$$x_1 + y_1 = 63 \qquad x_2 + y_2 = 21 \qquad x_3 + y_3 = 9$$
$$x_1 - y_1 = 1 \qquad x_2 - y_2 = 3 \qquad x_3 - y_3 = 7.$$

Ихъ рѣшенія:

$$x_1 = 32,\ y_1 = 31;\ x_2 = 12,\ y_2 = 9;\ x_3 = 8,\ y_3 = 1.$$

Отыскиваемъ тѣ значенія x и y, разность которыхъ $= 23$, и находимъ x_1 и y_2; слѣдовательно, 32 предмета куплено Иваномъ, а 9—Катериною, и т. д. Такимъ образомъ, имѣемъ слѣдующія комбинаціи

Иванъ	32	Петръ	12	Алексѣй	8
Анна	31	Катерина	9	Марья	1

Русскія задачи.

О состояніи и развитіи математическихъ знаній на Руси въ ея древнѣйшій періодъ неизвѣстно почти ничего. Въ «Русской Правдѣ» Ярослава есть, положимъ, статья съ такимъ расчисленіемъ: «А отъ 20 овецъ и отъ двою приплода на 12 лѣтъ— 90 000 овецъ» и т. д. Вычисленіе стоимости приплода, или прибытка, и получаемыхъ отъ скота продуктовъ вѣрны и доказы-

ваютъ, что составители «Русской Правды» были знакомы съ умноженіемъ и дѣленіемъ. Но въ общемъ есть основанія думать, что о какихъ бы то ни было самостоятельныхъ шагахъ ни въ одной области математики въ Россіи говорить не приходится чуть ли не до 18-го или даже 19-го вѣка. Немногочисленныя дошедшія до настоящихъ дней математическія рукописи служатъ тому убѣдительнымъ доказательствомъ.

Такъ, въ своихъ извѣстныхъ примѣчаніяхъ къ «Исторіи Государства Россійскаго» Карамзинъ говоритъ, что въ его распоряженіи была рукопись геометріи XVII вѣка подъ заглавіемъ: «*Книга именуемая геометрія или землемѣрія радиксомъ и цыркулемъ*». За геометріей слѣдуетъ: «книга *о сошномъ и вытномъ* письмѣ»; потомъ рукописная ариѳметика, озаглавленная: «книга рекома по-гречески *Ариѳметика*, а по-нѣмецки *Алгоризма*, а по-русски *цифирная счетная мудрость*». Въ предисловіи книги говорится:

«Сиръ, сынъ Асиноровъ, мужъ мудръ бысть: сій же написа численную сію философію финическими письмены, яко же онъ мудрый глаголетъ, яко безплотна сущи начала, тѣлеса же преминующая.—Безъ сея книги не единъ философъ, ни дохтуръ не можетъ быти а хто сію мудрость знаетъ, можетъ быть у государя въ великой чести и въ жалованіи; по сей мудрости гости (купцы) по государствамъ торгуютъ, и во всякихъ товарѣхъ и въ торгѣхъ силу знаютъ, и во всякихъ вѣсѣхъ и въ мѣрахъ и въ земномъ верстаніи и въ морскомъ теченіи зело искусны, и счетъ изъ всякаго числа перечню знаютъ».

Изъ памятниковъ русской старинной математической литературы въ настоящее время имѣются шесть математическихъ рукописей въ Императорской публичной библіотекѣ, шесть въ Румянцевскомъ музеѣ, одна въ книгохранилищахъ Чудова монастыря, одна въ библіотекѣ общества любителей древней письменности. Вотъ, напр., содержаніе рукописной ариѳметики (рукопись № 681) Румянцевскаго музея:

Рукопись имѣетъ слѣдующее заглавіе: «Пятая мудрость въ семи великихъ мудростѣхъ нарицается Ариѳметика». Изложеніе ариѳметики раздѣлено на статьи, а статьи распадаются на нумерованныя отдѣленія, называемыя *строками*, отвѣчающими на-

шимъ дѣленіямъ на главы и параграфы. Вотъ содержаніе: *Первая статья отъ числа.* Нюмерація или считаніе словесемъ и начертаніе числомъ цыфирнымъ. *Другая статья*—адитсіе или считаніе—наше сложеніе; статья именуется сютракіе—по нашему вычитаніе; *статья мюлтипликасіе*, или умноженіе числу всякому; *статья дивизіе или дѣловая*; указъ како костьми считати; *статья адитіе или счетная костьми или пѣнязи. Статья костьми мултипликасіе* или умножальная. *Статья сюбстаксіе* костьми или выниманіе. Статья *дѣловая* костьми, дивизіе или росчитаніе. *Указъ о дощаномъ счетѣ. Указъ како класти костьми* сошную кладь. Статья о вѣсѣхъ и о мѣрахъ *московскаго государства русскіе земли.* Статья о вѣсѣхъ и о мѣрахъ нѣмецкіе земли. Статья французскіе земли о денежномъ счетѣ ливонскомъ, виницейскомъ и ѳлоренсхомъ».

Потомъ идетъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе въ *вѣсахъ и въ мѣрахъ и въ деньгахъ*, или по современному: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе именованныхъ чиселъ. «*Статья численная* о *всякихъ доляхъ*; *уменьшеніе долямъ:* сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе дробей; потомъ *статья стройная въ цѣлыхъ и въ доляхъ всякихъ. Статья тройная въ доляхъ. Статья дѣловая; статья торговая*; *статья о прикупахъ*; о накладѣхъ счетъ; статья спрашиваемая въ тройной строкѣ; статья спрашиваемая во времени. Статья ростовая и добычная; статья о нечисти во всякихъ овощахъ и въ товарахъ; *статіа фальшивая или сбойливая статіа мѣновая* въ торгу. Статіа торговая складная; статіа торговая складная съ прикащики и др., о деньгахъ въ кучѣ увѣдати; о плотникѣхъ (задача); *о яйцахъ* (задача); о хожденіи юношей трехъ зерньщиковъ.

Способъ изложенія въ рукописи строго догматическій. Правила предлагаются въ формѣ предписанія или рецепта, не содержащаго даже намека на указаніе мотивовъ и основаній. Примѣры идутъ: одни тотчасъ за изложеніемъ правила, другіе наоборотъ. Вотъ образчикъ преподанія правила сокращенія дробей:

«Уменьшеніе долямъ». Когда оставляются въ дѣловой великія доли въ числахъ ибо надобе ихъ сводить въ невеликія числа Смотри возьму остатковъ въ доляхъ 40, а дѣловой не-

речень (дѣлитель) 60 и ты поставь еще $^{40}/_{60}$ и прежъ оными у обоихъ чиселъ 0 ино станетъ $^{4}/_{6}$; да смотри льзяли оба числа верхнія и нижнія во единъ дѣлъ раздѣлити и ты дѣли какъ на два придетъ $^{2}/_{3}$ т. е. двѣ трети».

Относительно употребляемыхъ въ рукописи знаковъ должно замѣтить, что употребленіе арабскихъ цифръ не вытѣснило церковно-славянскихъ знаковъ, такъ статья о «нюмерасіи или счисленіи числомъ цыфирнымъ» начинается съ перевода первыхъ девяти церковно-славянскихъ знаковъ на употребляемыя нами цифры. Въ примѣрахъ съ отвлеченными числами исключительно употребляются цифры; въ именованныхъ — употребляются смѣшанно церковно-славянскіе знаки и цифры.

Въ Императорской публичной библіотекѣ есть рукописная ариѳметика, гдѣ упомянуть годъ, когда писалась рукопись. Она озаглавлена такъ: «Книга, глаголемая ариѳметика, пятая изъ седьми мудростей наука. Начата бысть писати отъ созданія міра въ лѣто 7199 года, индикта 14, круга солнечнаго 3, луннаго 17; отъ рождества по плоти единосущнаго отцу Слова 1691 года; справнаго луннаго слова **О**, а ключевого пасхальнаго **Ф**, мѣсяца Іуніа 28 дня».

«Увѣщеваніе» и предисловіе въ этой рукописи написаны стихами, часть которыхъ посвящена восхваленію счета и нуля, называемаго *«ономъ»*.

Да увѣстся о семъ, яко ариѳметика
Девяти чиселъ, девяти и статей наука,
Десятое же мѣсто *ономъ* исполняетъ,
Своего числа мѣсто просто сохраняетъ.

Кому либо въ счетѣ необрѣтатися
Ту есть станетъ *Онъ* ему же не считатися,
Разумѣй, идѣ же *Онъ* мѣсто порозже есть:
Тако въ статьяхъ десятья науки нѣсть!

Точію вмѣсто того поставки различные.
Въ строкахъ считаніе славяномъ не обычны:
Тѣхъ поставокъ подробно и счести,
Кто ихъ навыкнетъ, можетъ вся подъ солнцемъ счести.

Итакъ, въ то время какъ въ Западной Европѣ создавались «Principia mathematica» и «Arithmetica universalis» Нью-

тона, когда блестящая плеяда математиковъ раздвигала все шире и шире всѣ области естествознанія, россійскіе «цыфирные грамотеи» все еще перебивались пережитками отдаленнаго средневѣковья. Математическіе курсы и сочиненія, стоящіе на болѣе высокомъ уровнѣ знаній, начинаютъ появляться на Руси только послѣ Петра Великаго. Однимъ изъ первыхъ и замѣчательнѣйшихъ учебниковъ ариѳметики, по которому учились наши прапрадѣды, былъ учебникъ Л. Магницкаго, изданный въ 1703 г. Приводимъ изъ него двѣ нижеслѣдующія задачи.

Задача 15-я.

Отвѣтъ учителя.

Вопроси нѣкто учителя нѣкоего глаголя: повѣждь ми колико имаши учениковъ у себе во училищи, понеже имамъ сына отдати во училище: и хощу увѣдати о числѣ учениковъ твоихъ? Учитель же отвѣщавъ рече ему: аще придетъ ми учениковъ толико же, елико имамъ, и полтолика, и четвертая часть, еще же и твой сынъ, и тогда будетъ у мене учениковъ 100. Вопросивый же удивлся отвѣту его отиде, и начатъ изобрѣтати.

Рѣшеніе.

Задача представляетъ, очевидно, варіантъ извѣстной задачи о стадѣ гусей, данной нами въ 1 части нашей книги. Отвѣтомъ на задачу служитъ число 36.

Нѣкоторыя старорусскія мѣры и выраженія.

Въ условіяхъ слѣдующихъ задачъ встрѣчаются слова, врядъ ли понятныя многимъ изъ современныхъ читателей. Приводимъ ихъ здѣсь для удобства въ особой табличкѣ:

1 алтынъ = 3 копѣйки = 6 денегъ
1 копѣйка = 2 деньги = 4 полушки = $1/2$ гроша
1 гривна = 10 копѣекъ.

пѣнязь (польская монета) = копѣйка
полтаражды значитъ $1^1/_2$
полтретья » $2^1/_2$
полчетвертажды » $3^1/_2$
полпята » $4^1/_2$ и т. д.

Задача 16-я.

Недогадливый купецъ.

Нѣкій человѣкъ продаде коня за 156 рублевъ, раскаявся же купецъ нача отдавати продавцу глаголя: яко нѣсть мнѣ лѣть взяти сицеваго коня недостойнаго таковыя высокія цѣны; продавецъ же предложи ему иную куплю глаголя: аще ти мнится велика цѣна сему коню быти, убо купи токмо гвоздіе ихже сей конь имать въ подковахъ своихъ ногъ, коня же возми за тою куплею въ даръ себѣ. А гвоздей во всякомъ подковѣ по шести, и за единъ гвоздь даждь ми едину полушку, за другій же двѣ полушки, а за третій копѣйку, и тако всѣ гвозди купи. Купецъ же видя толь малу цѣну и коня хотя въ даръ себѣ взяти: обѣщася тако цѣну ему платити, чая не больше 10 рублевъ за гвоздіе дати. И вѣдателно есть: коликимъ купецъ онъ проторговался?

Рѣшеніе.

Купецъ дѣйствительно «проторговался» очень сильно, такъ какъ за гвозди ему приходится заплатить

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\ldots\ldots + 2^{23} \text{ полушекъ,}$$

что составитъ 41 787 руб. $3^3/_4$ коп.!

Задача опять таки принадлежитъ къ типу уже извѣстныхъ намъ задачъ, рѣшающихся прогрессіей (см., напр., «Въ Царствѣ смекалки», книга 1-я, стр. 120; книга 2-я, стр. 70 и слѣд.).

Вообще же говоря, всѣ почти задачи въ руководствѣ Магницкаго носятъ характеръ простыхъ переводовъ съ иностранныхъ руководствъ. Бо̀льшую самостоятельность въ обработкѣ матерьяла проявилъ артиллеріи штыкъ-юнкеръ Ефимъ Войтяховскій, издавшій курсъ математики въ 1820 году.

Вотъ полный заголовокъ этой книги: «Полный курсъ чистой математики, сочиненный артиллеріи штыкъ-юнкеромъ и математики партикулярнымъ учителемъ Ефимомъ Войтяховскимъ, въ пользу и употребленіе юношества и упражняющихся въ математикѣ». 4 тома, изд. 1820 г.

Задачи курса Войтяховскаго болѣе переработаны и приспособлены къ русскому кругозору, а нѣкоторыя изъ нихъ положительно остроумны, иногда, впрочемъ, до игривости, сбивающейся на «раешникъ». Не обходится въ иныхъ изъ нихъ и безъ сатиры, предметомъ которой обыкновенно избираются въ силу условій времени французы. Вотъ нѣсколько задачъ изъ курса Войтяховскаго. Рѣшенія ихъ незамысловаты, такъ что даемъ только отвѣты.

Задача 17-я.

Богатство мадамы.

Нововыѣзжей въ Россію Французской Мадамѣ вздумалось цѣнить свое богатство въ чемоданѣ: новой выдумки нарядное фуро и праздничный чепецъ а ла фигаро; оцѣнщикъ былъ Русакъ, сказалъ Мадамѣ такъ: богатства твоего первая вещь фуро вполчетверта дороже чепца фигаро; вообщежъ стоютъ не съ половиною четыре алтына, но настоящая имъ цѣна только сего половина; спрашивается каждой вещи цѣна, съ чѣмъ Француженка къ Россамъ привезена.

Отвѣтъ. Чепецъ «а ла фигаро» стоитъ $1^1/_2$ коп., а нарядное фуро $5^1/_4$ коп.

Задача 18-я.

Богатство Гасконца.

У прiѣзжаго Гасконца оцѣнили богатство: модной жилетъ съ поношеннымъ фракомъ въ три алтына безъ полушки, но фракъ вполтретья дороже жилета; спрашивается каждой вещи цѣна?

Отвѣтъ. Цѣна фрака $6^1/_4$ коп., жилета $2^1/_2$ коп.

Задача 19-я.

Веселый французъ.

Веселый Французъ пришедъ въ трактиръ съ неизвѣстною суммою своего богатства, занялъ у содержателя столько денегъ, сколько у себя имѣлъ; изъ сей суммы издержалъ 1 рубль. Съ остаткомъ пришелъ въ другой трактиръ, гдѣ опять занявши столько сколько имѣлъ, издержалъ въономъ также 1 рубль; потомъ пришедъ въ третiй и четвертый трактиръ учинилъ тоже, наконецъ по выходѣ изъ четвертаго трактира не имѣлъ ничего; спрашивается количество его денегъ.

Отвѣтъ. $93^3/_4$ коп.

Задача 20-я.

Куплено сукна полторажды полтретья аршина, заплачено полчетвертажды полпята рубли; спрашивается, сколько должно заплатить за полсемажды полдевята аршина того же сукна?

Отвѣтъ. 232 руб. 5 коп. Задачу эту, говорятъ, любилъ предлагать на экзаменахъ покойный Императоръ Николай I-й.

Задача 21-я.

Дѣлежъ.

4 путешественника: купецъ съ дочерью, да крестьянинъ съ женою нашли безъ полушки 9 алтынъ

да лапти, изъ коихъ крестьянкѣ дали грошъ безъ полушки да лапти, а остальныя деньги раздѣлили между собой такъ: купеческая дочь взяла вполтора больше крестьянина, а купецъ вполтретья больше крестьянина; спрашивается, сколько которому досталось?

Отвѣтъ. Крестьянинъ получилъ 5 коп., дочь купца $7^1/_2$ коп., купецъ $12^1/_2$ коп.

Задача 22-я.

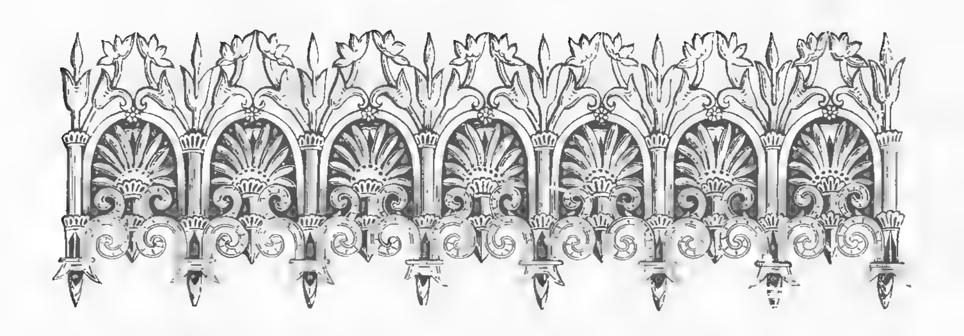
Мѣна.

Крестьянинъ мѣнялъ зайцевъ на домашнихъ курицъ, бралъ за всякихъ двухъ зайцовъ по три курицы; каждая курица снесла яицъ третью часть противъ числа всѣхъ курицъ. Крестьянинъ, продавая яйцы, бралъ за каждыя девять яицъ по столько копѣекъ, сколько каждая курица яицъ снесла, за которыя выручилъ онъ 24 алтына; спрашивается число куръ и зайцовъ?

Отвѣтъ. 12 зайцевъ и 18 куръ.

Послѣдующіе составители нашихъ ариѳметическихъ учебниковъ и задачниковъ не развивали идеи Войтяховскаго—предлагать задачи и примѣры въ легкой, доступной и даже забавной формѣ. Объ этомъ надо пожалѣть.





Иллюзіи зрѣнія.

Большая часть такъ называемыхъ иллюзій (обмановъ) зрѣнія извѣстны въ теченіе многихъ столѣтій,— и многіе изъ нихъ остаются необъяснимыми еще по сей день. Новые типы зрительныхъ обмановъ такъ рѣдки, что можно, пожалуй, считать эту любопытную область исчерпанной. Лишь изрѣдка случается наталкиваться на совершенно новый родъ зрительныхъ иллюзій, неизвѣстный нашимъ предкамъ. Къ числу ихъ, между прочимъ, принадлежитъ та, которая описана во второмъ томѣ (стран. 15 и сл.) настоящей хрестоматіи—это кажущаяся непараллельность буквъ въ словѣ **Life** и мнимая спираль на клѣтчатомъ фонѣ.

Объяснить, въ силу какихъ причинъ получаются подобные обманы зрѣнія, мы не можемъ. Вотъ почему тѣмъ интереснѣе будетъ подробно прослѣдить за процессомъ, съ помощью котораго рисовальщикъ достигаетъ этихъ удивительныхъ иллюзій зрѣнія. Беремъ то же слово «Life».

Фиг. 1 даетъ буквы, поставленныя совершенно прямо; но очертанія ихъ выведены зубчатой линіей, при чемъ вершины зубцовъ лежатъ на линіяхъ, строго параллельныхъ горизонтальному и вертикальному краямъ бумаги.

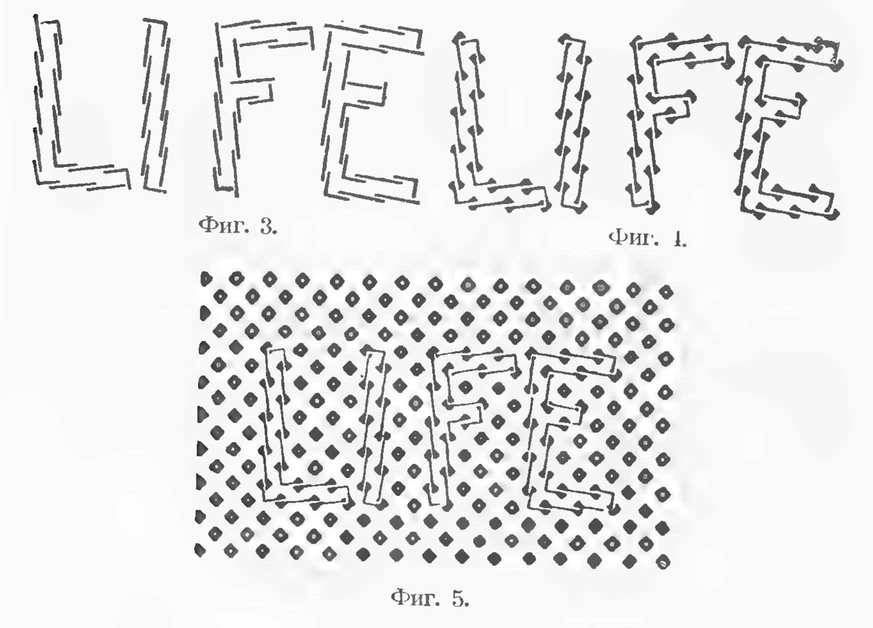
На фиг. 2 часть промежуточныхъ звеньевъ зубчатыхъ линій удалена, остальные же штрихи оставлены на своихъ мѣстахъ. Уже здѣсь замѣчается легкій наклонъ буквъ.



Фиг. 1. Фиг. 2.

На фиг. 3 каждый штрихъ удлиненъ вдвое.

На фиг. 4-й къ концамъ каждаго штриха пририсованъ черный треугольникъ. Здѣсь иллюзія выступаетъ уже съ полной отчетливостью.



Фиг. 3. Фиг. 4.

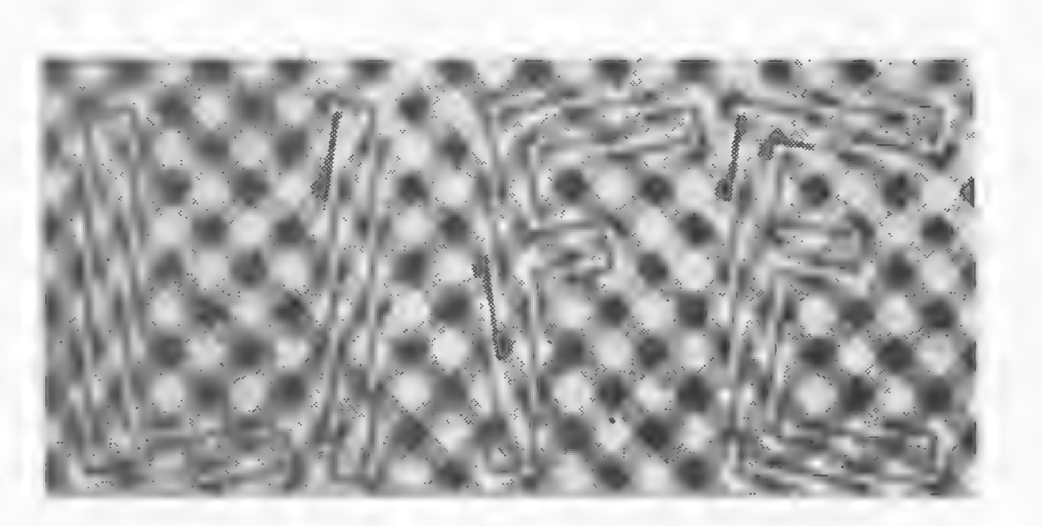
Фиг. 5.

На фиг. 5 все свободное поле между литерами заполнено черными квадратиками, расположенными косыми рядами.

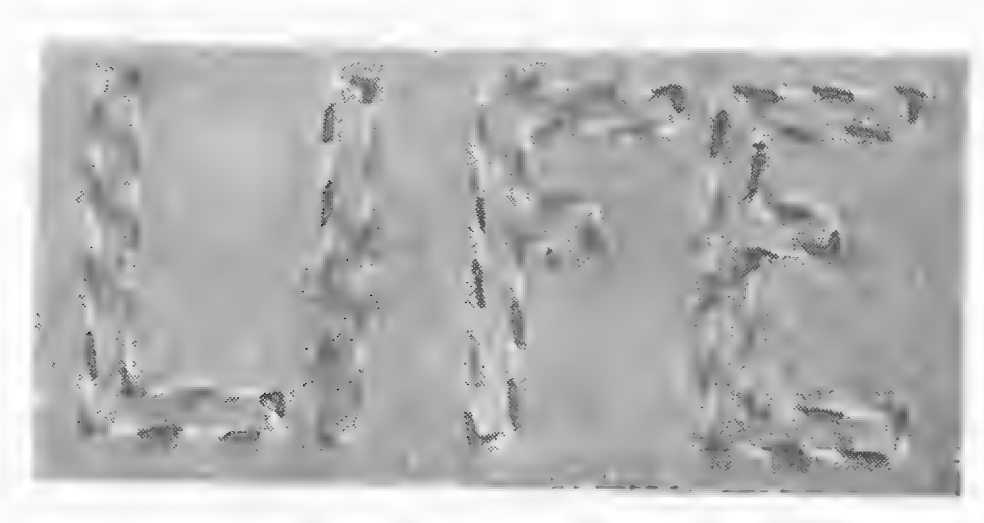
На фиг. 6 промежутки между черными квадратиками заполнены сѣрыми квадратиками—и иллюзія достигаетъ наибольшей разительности.

Фиг. 7 наглядно показываетъ, насколько ослабляется иллюзія съ удаленіемъ клѣтчатаго черно-сѣро-бѣлаго фона.

Иллюзіи съ концентрическими кругами построены приблизительно по тому же типу. Разница въ томъ, что косые прямолинейные штрихи замѣняютъ здѣсь эксцентричными дугами окружностей бо̀льшаго радіуса. Отъ направленія этихъ маленькихъ дугъ и зависитъ окончательный эффектъ,—то впечатлѣніе, которое производятъ на насъ концентрическія окружности. Какія необычайныя метаморфозы могутъ при этомъ происходить съ ними, лучше всего доказываютъ приложенные здѣсь рисунки.

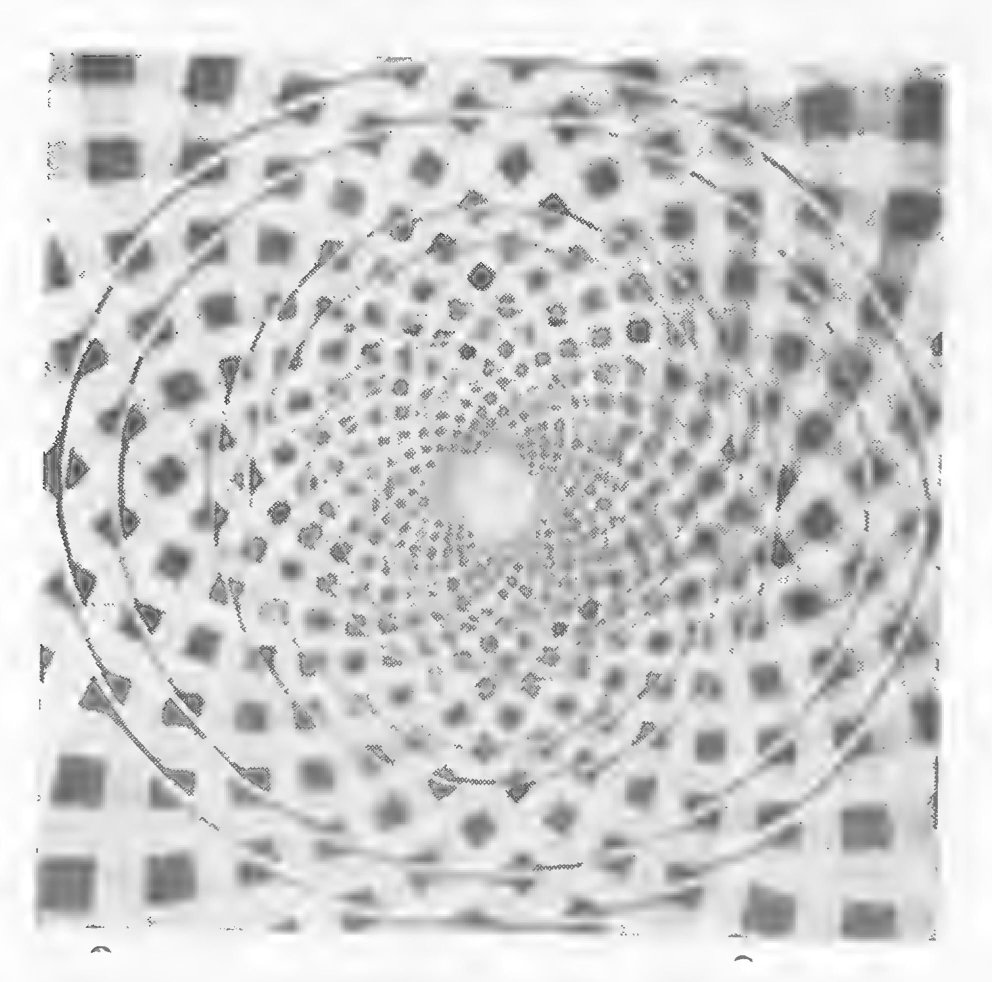


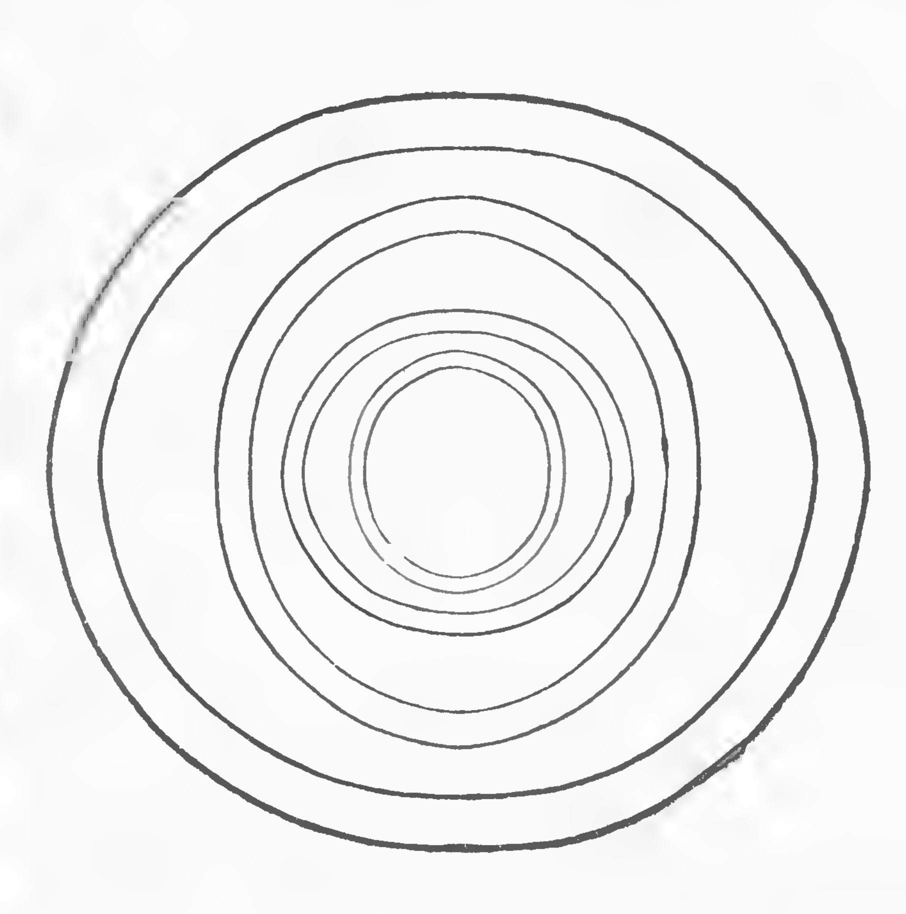
Фиг. 6.

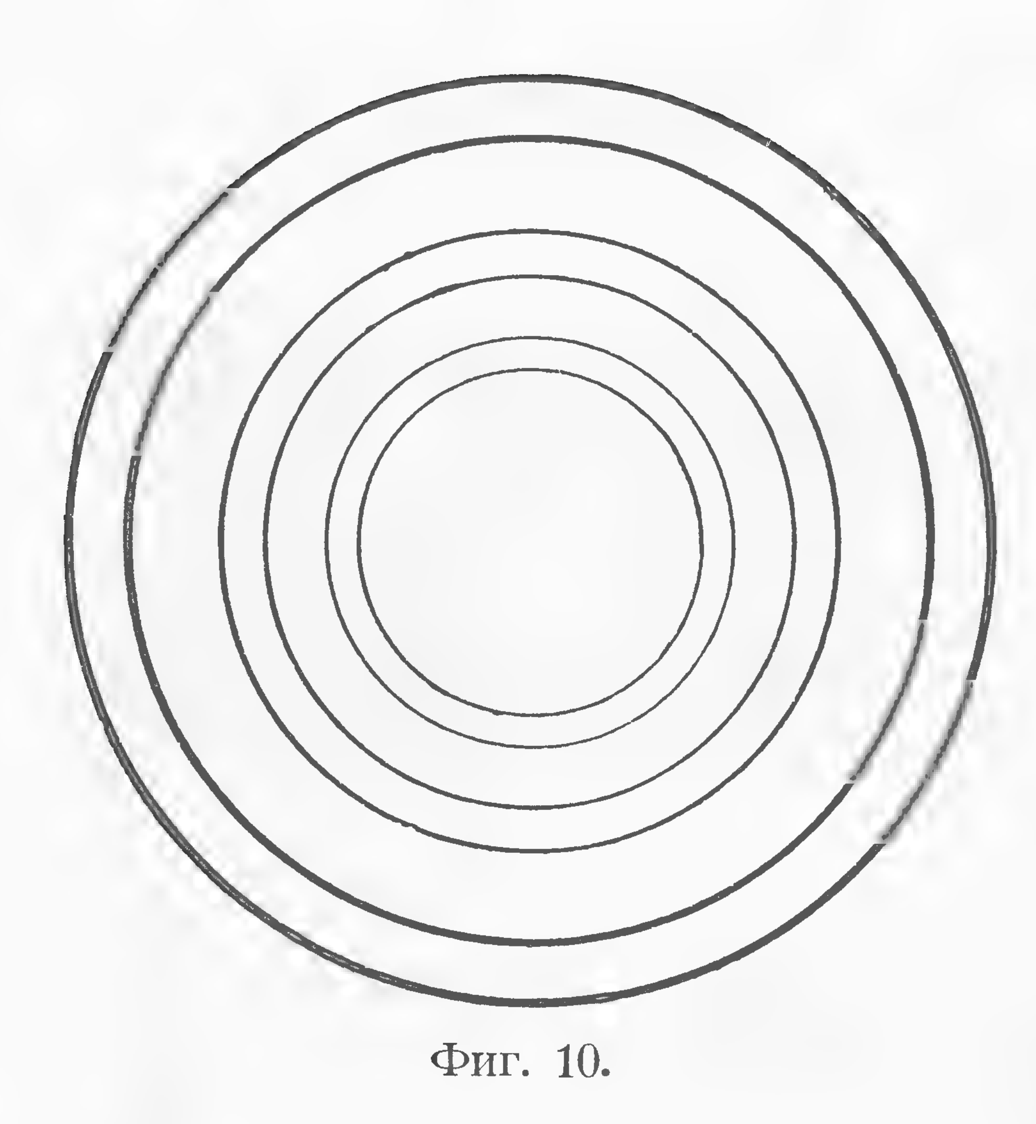


Фиг. 7.

На фиг. 8 вы отчетливо видите серію вложенныхъ другъ


Фиг. 8.


Фиг. 9.



Фиг. 10.

въ друга сплющенныхъ окружностей, — какъ это изображено на фиг. 9. А между тѣмъ при помощи циркуля легко убѣдиться, что передъ вами рядъ строго - концентрическихъ окружностей, какъ это начерчено на фиг. 10.

На фиг. 11 концентрическіе круги кажутся спиралью, съ концентрическими завитками. На фиг. 12 эти завитки какъ будто становятся съ каждымъ оборотомъ все шире и шире, — чего на самомъ дѣлѣ, конечно, нѣтъ.

Еще оригинальнѣе спираль фиг. 13,—она то разжимается, то суживается, и, глядя на нее, никакъ не можешь себѣ представить, чтобы это были строго-концентрическія окружности.

Самый поразительный эффектъ производитъ фиг. 14: передъ вами совершенно ясно вырисовывается рядъ квадратовъ съ закругленными углами! А между тѣмъ это опять-таки совершенно правильныя окружности.

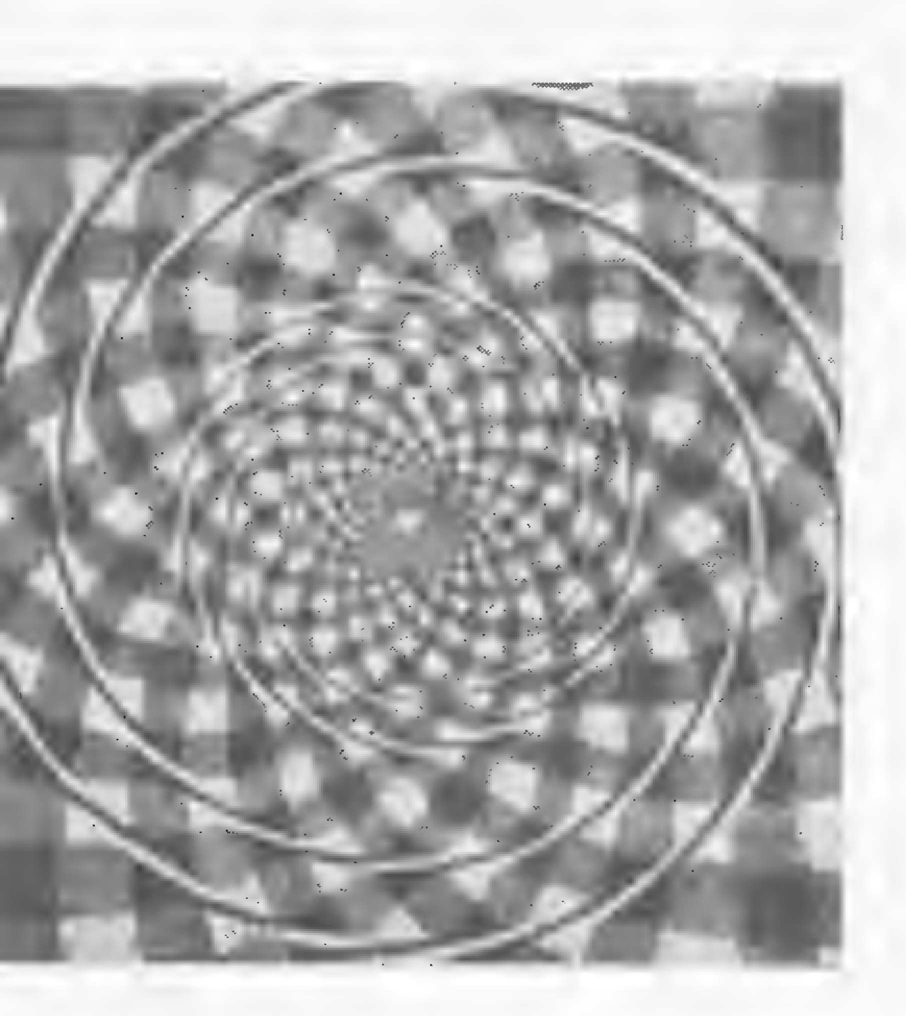
На фиг. 15 концентрическія окружности принимаютъ обликъ какой-то совершенно неправильной, запутанной кривой.



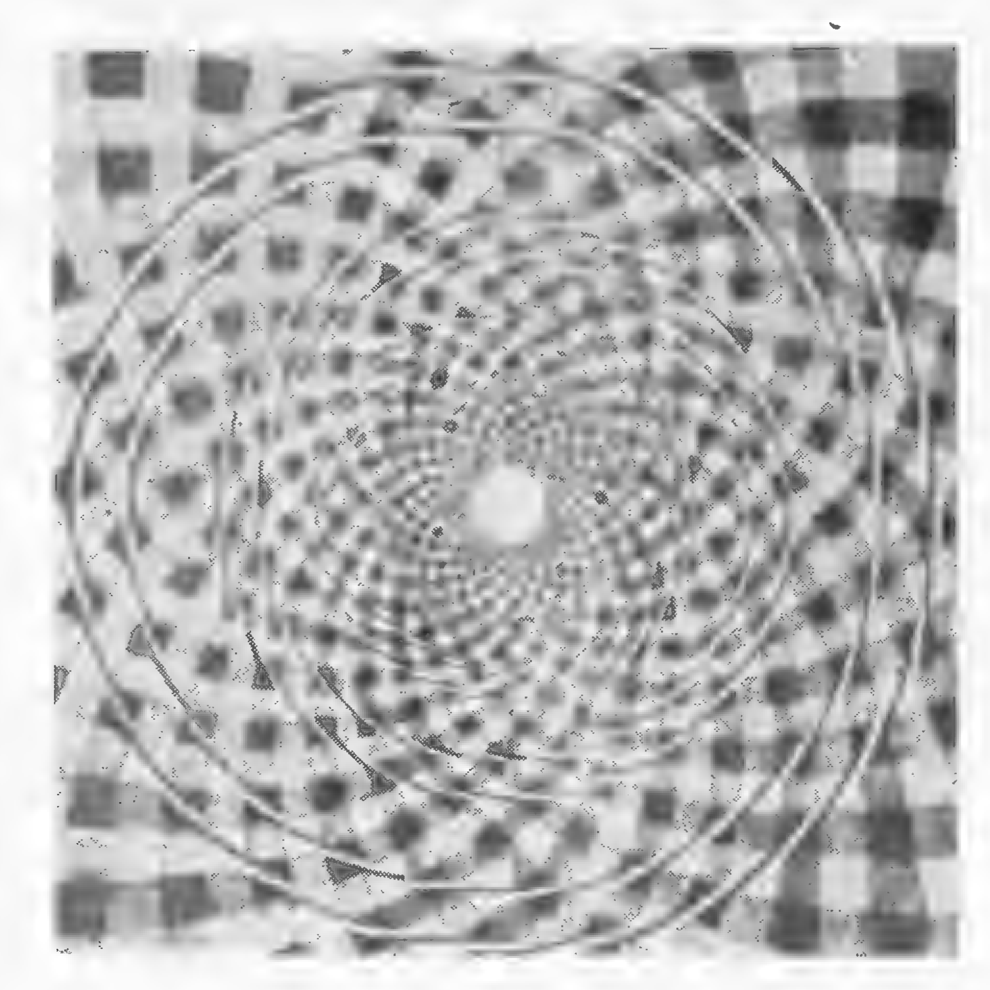
Фиг. 11.

Любопытно отмѣтить двѣ особенности описанныхъ здѣсь оптическихъ иллюзій. Въ противоположность всѣмъ осталь-

нымъ типамъ иллюзій, эффектъ здѣсь не только не ослабляется при продолжительномъ разсматриваніи, но, напротивъ, еще усили-

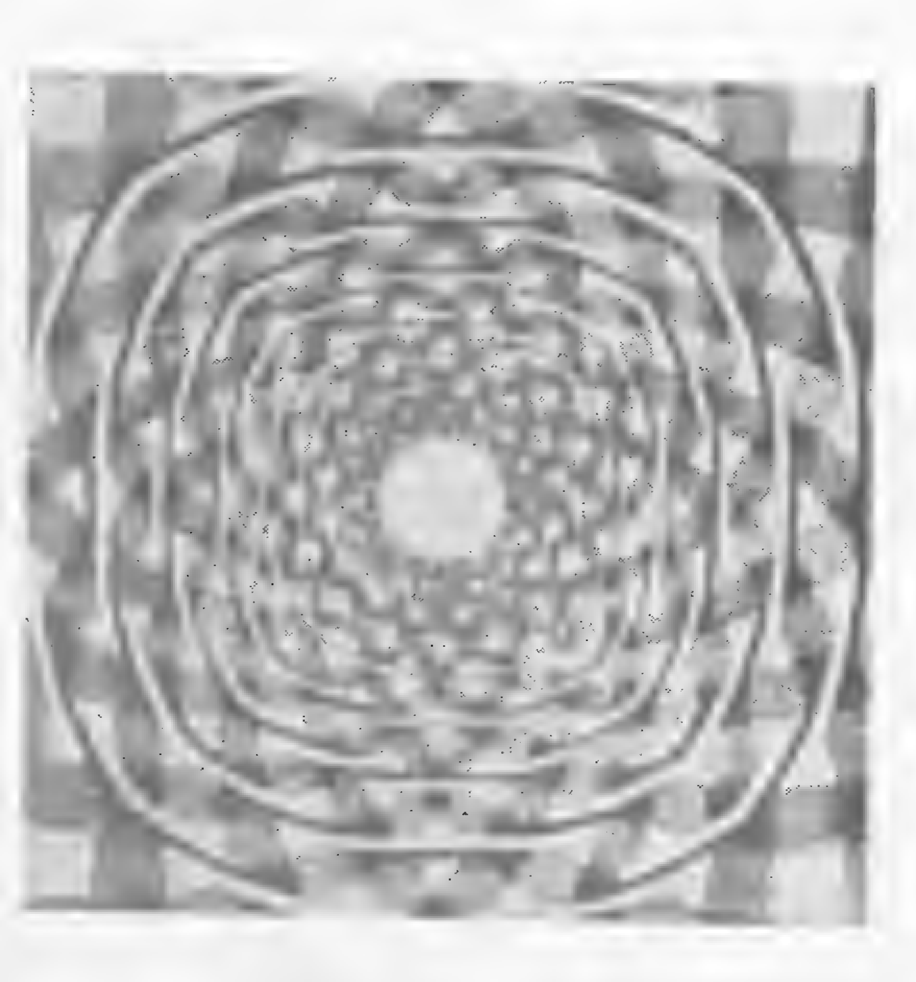


Фиг. 12.

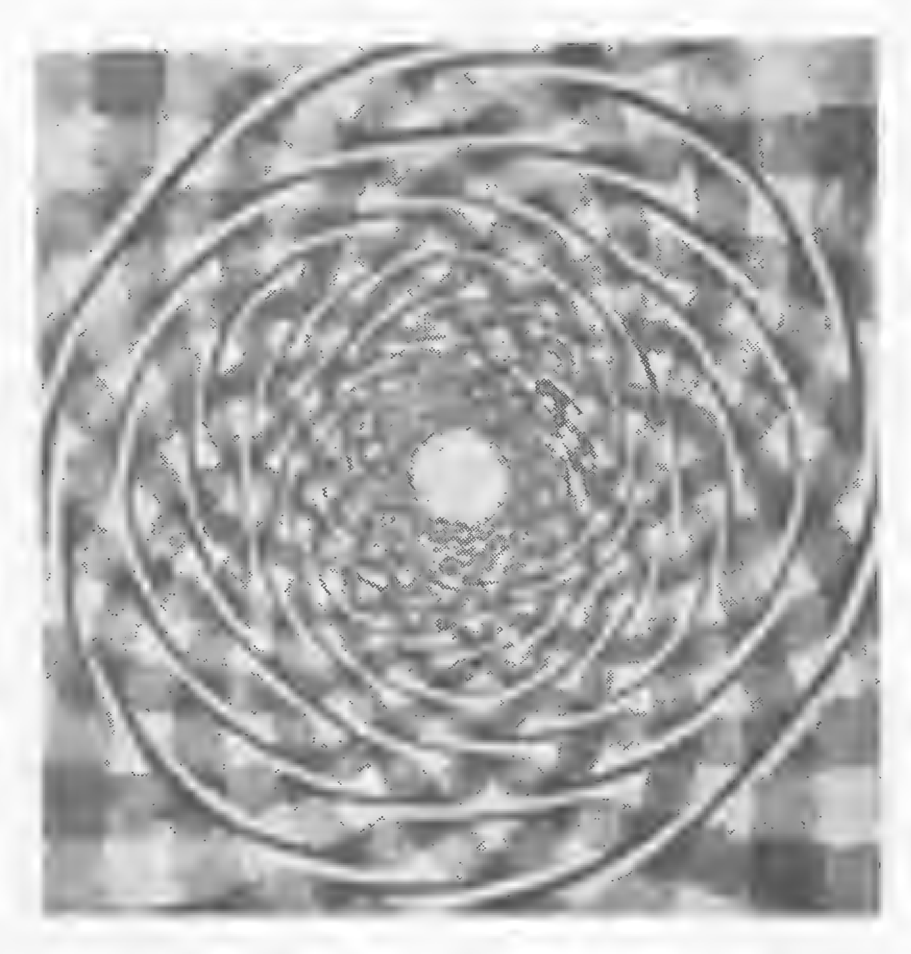


Фиг. 13.

вается. Вы можете смотрѣть на рисунки цѣлые часы,—и спирали все же не превратятся для вас въ концентрическіе круги.



Фиг. 14.



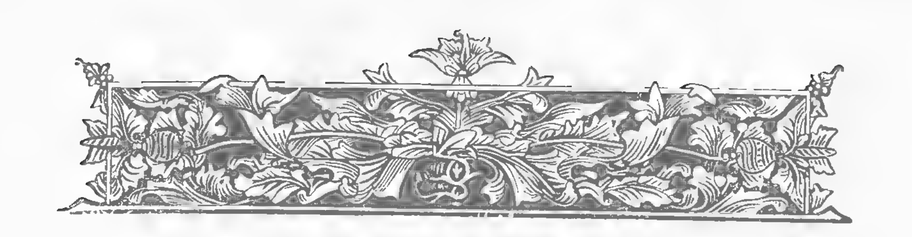
Фиг. 15.

Другая особенность—это усиленіе эффекта съ приближеніемъ рисунка къ глазу. При удаленіи отъ глаза отдѣльные

косые штрихи начинаютъ расплываться, уклонъ ихъ стушевывается—и основная причина иллюзіи отпадаетъ.

Очень забавно производить слѣдующій опытъ: показавъ кому-нибудь одинъ изъ этихъ рисунковъ, попросить обвести контуры фигуры на прозрачной бумагѣ. Разсматривая потомъ отдѣльно свой собственный чертежъ, рисовавшій положительно не вѣритъ своимъ глазамъ.





Задачи-шутки.

Есть не мало задачъ-шутокъ, основанныхъ на такъ называемомъ «гипнозѣ» словъ или обозначеній, вѣрнѣе же говоря,— на томъ или иномъ «отводѣ глазъ». Постановка вопроса, а затѣмъ «разрѣшеніе» его бываютъ иногда столь искусно разсчитаны на отвлеченіе вниманія слушателя въ другую сторону, что послѣднему часто бываетъ трудно не поддаться, а хладнокровно сообразить, въ чемъ секретъ. Въ дополненіе къ разнымъ задачамъ-шуткамъ, приведеннымъ нами въ предыдущихъ томахъ настоящей книги, даемъ здѣсь для образца нѣсколько «гипнотическихъ» задачъ.

Задача 23-я.

Искусное размѣщеніе.

Можно ли размѣстить 11 лошадей въ 10-ти стойлахъ такъ, чтобы въ каждомъ стойлѣ было всего по одной лошади?

Всякій скажетъ, что невозможно: для одиннадцатой лошади недостанетъ стойла. Но не угодно ли убѣдиться, что при нѣкоторомъ искусствѣ это «вполнѣ возможно».

Въ самомъ дѣлѣ, помѣстимъ временно одиннадцатую лошадь въ первое стойло:

2 л.	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	

и затѣмъ станемъ помѣщать остальныхъ лошадей по одной въ каждое стойло. Тогда въ первомъ стойлѣ окажутся двѣ лошади, третью лошадь мы помѣстимъ во второе стойло, четвертую—въ третье и т. д Десятая лошадь займетъ девятое стойло, и останется лишь перевести 11-ую лошадь изъ перваго стойла въ свободное десятое.

Рѣшеніе.

Весь прямо ошеломляющій иныхъ эффектъ этой задачи-шутки зиждется на *гипнозѣ словъ*, которому почти невозможно не поддаться. Мы такъ увлеклись поисками мѣста для *одиннадцатой* лошади, что совершенно не замѣчаемъ отсутствія *второй* лошади. У насъ есть 1-я, 11-я, 3-я, 4-я, 5-я, 6-я, 7-я, 8-я, 9-я и 10-я лошадь, -но гдѣ же 2-я? Ея отсутствіе замаскиривано цифрой 2 въ первомъ стойлѣ.

Задача 24-я.

Расплатился безъ денегъ.

Въ ресторанъ заходитъ посѣтитель и требуетъ пива. Офиціантъ приноситъ бутылку и готовъ уже раскупорить, какъ вдругъ посѣтитель передумываетъ.

— Дайте мнѣ лучше лимонаду.

— Извольте-съ. Намъ все единственно. И цѣна та же,- -отвѣчаетъ оффиціантъ и, унеся пиво, является съ лимонадомъ.

Посѣтитель выпиваетъ лимонадъ и собирается уходить. Его догоняетъ офиціантъ.

— Забыли заплатить-съ!..

— За что?—изумляется посѣтитель.

— За бутылку лимонаду-съ.

— Вы же взяли за нее пиво.

— Тогда извольте заплатить за пиво. Вы и за пиво не заплатили-съ...

— Но вѣдь я не пилъ пива. Вы унесли бутылку нераскупоренной,—невозмутимо отвѣчаетъ посѣтитель, оставляя официанта въ полномъ недоумѣнiи.

Задача 25-я.

Дешевая покупка.

Въ часовой магазинъ заходитъ покупатель и проситъ показать ему дорогiе часы. Онъ долго выбираетъ и, наконецъ, останавливаетъ выборъ на солидныхъ дорогихъ часахъ.

— Что стоятъ?

— Двѣсти рублей.

— Хорошо, я беру ихъ. Заверните.

Покупатель собирается уже платить, но вдругъ взглядъ его падаетъ на изящные серебряные часы.

— А эти сколько у васъ стоятъ?

— Эти подешевле будутъ: сто рублей!

— Право, они мнѣ больше нравятся. Заверните.

Покупатель платитъ 100 рублей, беретъ часы и направляется къ выходу. Но затѣмъ снова возвращается.

— Нѣтъ, я передумалъ: рѣшилъ-таки купить тѣ золотые.

— Какъ угодно. Прикажете завернуть.

— Пожалуйста. Они стоятъ двѣсти?

— Да.

— Сто рублей я уже далъ вамъ?

— Да. Съ васъ причитается еще сто.

— Возьмите вмѣсто нихъ эти серебряные часы: вѣдь я купилъ ихъ у васъ за сто рублей...

Рѣшеніе.

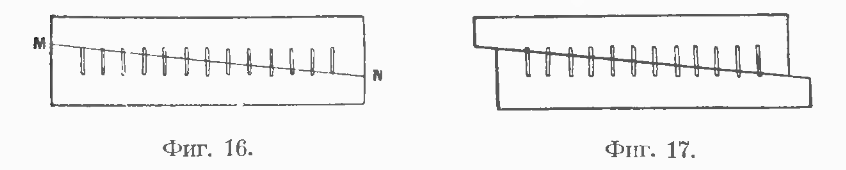
Обѣ задачи, какъ уже сказано, основаны на гипнозѣ словъ. Въ первомъ случаѣ слова «Я не пилъ пива»— кажутся достаточнымъ основаніемъ, чтобы не платить за напитокъ. На самомъ же дѣлѣ продавцу совершенно безразлично, какое употребленіе вы дѣлаете изъ вещи,—уничтожаете ее или даете ее въ уплату за другую вещь: вы ее такъ или иначе употребили, значитъ, должны за нее платить.

Въ задачѣ съ часами одни и тѣ же сто рублей идутъ въ уплату два раза: разъ — за серебряные часы, и вторично — за золотые.

Задача 26-я.

Загадочное исчезновеніе.

Начертите на прямоугольномъ кускѣ картона 13 одинаковыхъ палочекъ, на равномъ разстояніи другъ отъ друга, такъ, какъ показано на фиг. 16-ой. Теперь разрѣжьте прямоугольникъ по косой линіи *MN*, про-



Фиг. 16. Фиг. 17.

ходящей черезъ верхній конецъ первой палочки и черезъ нижній конецъ послѣдней. Если затѣмъ вы сдвинете обѣ половины такъ, какъ показано на фиг. 17, то замѣтите любопытное явленіе: вмѣсто 13 палочекъ передъ вами окажется всего 12! Одна палочка исчезла безслѣдно. Куда же она дѣвалась?

Рѣшеніе.

Идея задачъ подобнаго рода для нашихъ читателей не нова. Съ ней мы уже встрѣчались во II-ой книгѣ «Въ царствѣ смекалки» при разсмотрѣніи геометрическихъ софизмовъ.

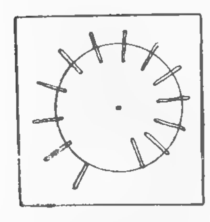
Если вы внимательно разсмотрите оба чертежа и дадите себѣ трудъ сопоставить длину старыхъ и новыхъ палочекъ, то замѣтите, что новыя чуть длиннѣе старыхъ. Тщательное измѣреніе убѣдитъ васъ, а то можно показать и вычисленіемъ, что разница въ длинѣ $= \frac{1}{12}$ долѣ старой палочки, и что, слѣдовательно, исчезнувшая 13-я палочка улетучилась не безслѣдно: она словно растворилась въ 12-ти остальныхъ, удлинивъ каждую изъ нихъ на $\frac{1}{12}$ своей длины.

Понять геометрическую причину того, что при этомъ произошло, очень не трудно. Прямая MN и та прямая, которая проходитъ черезъ верхніе концы всѣхъ палочекъ, образуютъ стороны угла, пересѣченныя рядомъ параллельныхъ на равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга. Вспомнивъ соотвѣтствующую геометрическую теорему, мы поймемъ, что линія MN отсѣкаетъ отъ второй палочки $\frac{1}{12}$ ея длины, отъ третьей $\frac{2}{12}$, отъ четвертой $\frac{3}{12}$ и т. д.

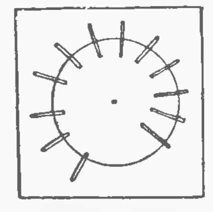
Когда же мы сдвигаемъ обѣ части картона, мы приставляемъ отсѣченный отрѣзокъ каждой палочки (начиная со второй) къ нижней части предыдущей. А такъ какъ каждый отсѣченный отрѣзокъ больше предыдущаго на $\frac{1}{12}$, то каждая палочка вслѣдствіе этой операціи должна удлиниться на $\frac{1}{12}$ своей длины, и всѣхъ палочекъ должно получиться 12.

На глазъ это удлиненіе незамѣтно, такъ что исчезновеніе 13-й палочки на первый взглядъ представляется довольно загадочнымъ.

Чтобы усилить эффектъ, можно расположить палочки по кругу, какъ показано на фиг. 18-й. Если вырѣзать внутренній кругъ и укрѣпить его въ центрѣ такъ, чтобы онъ могъ вращаться, то поворотомъ круга на небольшой уголъ мы опять достигаемъ исчезновенія одной палочки (фиг. 19).



Фиг. 18.



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Задача 27-я.

Куда дѣвался китаецъ?

На только что разсмотрѣнномъ принципѣ основана остроумная игрушка-задача, изображенная на фиг. 20-й. Вы видите земной шаръ, по краямъ котораго художникъ размѣстилъ 13 китайцевъ въ весьма воинственныхъ позахъ. Внутренній дискъ вырѣзанъ и можетъ вращаться вокругъ своего центра. И вотъ, слегка повернувъ этотъ кругъ, вы уничтожаете одного китайца (фиг. 21): вмѣсто прежнихъ 13, передъ вами уже всего 12 сыновъ Небесной Имперіи! Тотъ китаецъ, который находился внутри круга и такъ воинственно наступалъ на своего компатріота, безслѣдно улетучился!..



Фиг. 21.

Исчезновеніе китайца заставило бы васъ долго ломать голову, если бы вы не познакомились съ разсмотрѣнными выше схематическими примѣрами. А теперь дѣло ясно: онъ «растворился» въ дюжинѣ своихъ соотечественниковъ, какъ раньше «растворялась» у насъ простая палочка.

Надо отдать справедливость рисовальщику: не мало потребовалось остроумія и терпѣнія, чтобы достичь такого эффекта!

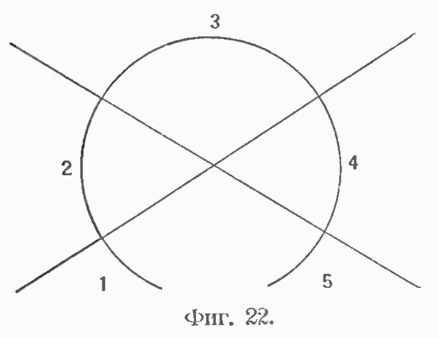
Задача 28-я.

Разрубить подкову.

Двумя ударами топора разрубить подкову на шесть частей, не перемѣщая частей послѣ перваго удара.

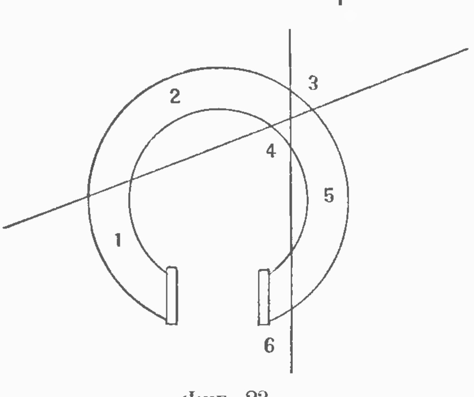
Рѣшеніе.

Если вы начертите подкову въ видѣ одиночной дугообразной линіи,—какъ это обыкновенно и дѣлаютъ, то сколько бы вы ни ломали голову, вамъ не удастся разрѣзать ее двумя прямыми больше, чѣмъ на 5 частей (фиг. 22).



Фиг. 22.

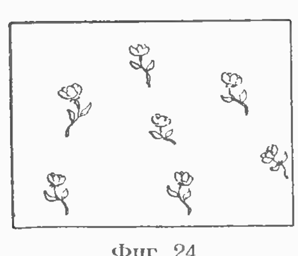
Другое дѣло, если вы начертите подкову въ видѣ двухъ параллельныхъ кривыхъ,—т. е. дадите фигурѣ ширину, какъ оно и есть на самомъ дѣлѣ. Тогда, послѣ нѣсколькихъ пробъ, вы нападете на вѣрное рѣшеніе задачи — разрѣжете подкову двумя прямыми на 6 частей (фиг. 23).



Фиг. 23.

Задача 29-я.

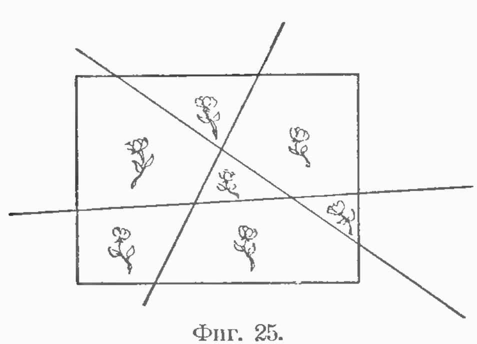
7 розъ.


Фиг. 24.

На коврѣ (фиг. 24) изображено 7 розъ. Требуется тремя прямыми линіями разрѣзать коверъ на семь частей, каждая изъ которыхъ содержала бы по одной розѣ.

Рѣшенiе.

См. фиг. 25-ю.

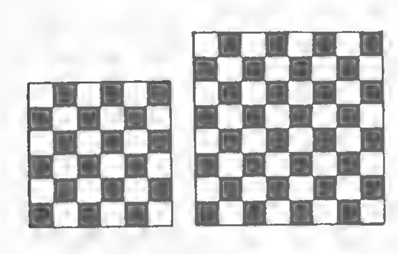


Фиг. 25.

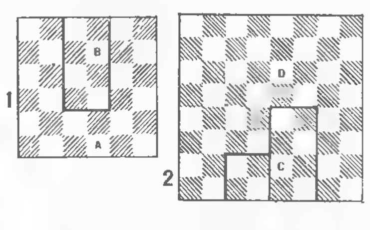
Задача 30-я.

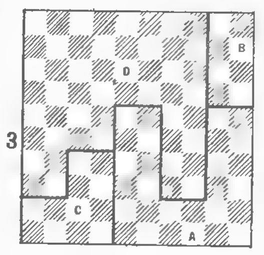
Разрѣзать шахматную доску.

Даны двѣ шахматныхъ доски: обыкновенная въ 64 клѣтки и другая—въ 36 клѣтокъ (фиг. 26). Требуется каждую изъ нихъ разрѣзать на двѣ части такъ, чтобы изъ всѣхъ полученныхъ 4 частей составить новую шахматную доску, содержащую на каждой сторонѣ по 10 клѣтокъ.



Фиг. 26.





Фиг. 26а.

Рѣшенiе.

См. фиг. 26-юа.

Задача 31-я.

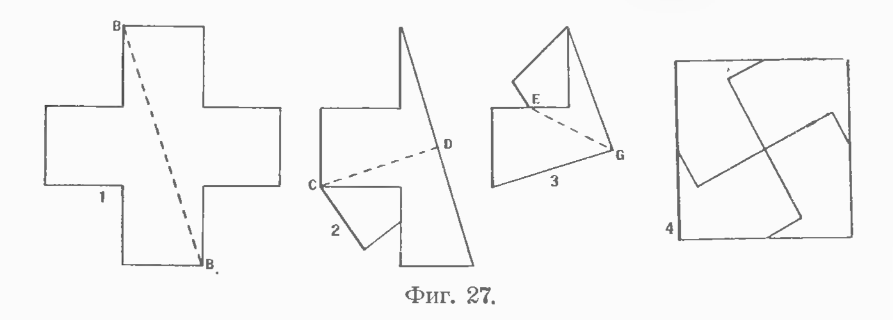
Изъ креста квадратъ.

Намъ уже дважды случалось предлагать эту задачу въ различныхъ варіантахъ (см. «Въ царствѣ смекалки» книга I-я, стр. 110, и книга II-я, стр. 15). Вотъ третій весьма остроумный ея варіантъ:

Разрѣзать бумажный греческій крестъ (прямой и равноконечный) однимъ взмахомъ ножницъ на четыре такихъ одинаковыхъ части, чтобы изъ нихъ можно было сложить квадратъ.

Рѣшеніе.

Задача рѣшается посредствомъ маленькой, но вполнѣ позволительной уловки: крестъ необходимо *предварительно перегнуть* два раза и лишь затѣмъ произвести разрѣзъ. Линіи перегиба обозначены на прилагаемыхъ чертежахъ (фиг. 27) пунк-



Фиг. 27.

тиромъ: перегибаютъ сначала по BB, потомъ еще разъ по CD. Разрѣзъ производятъ по EG, при чемъ получаютъ четыре одинаковыхъ фигуры, изъ которыхъ складывается квадратъ.

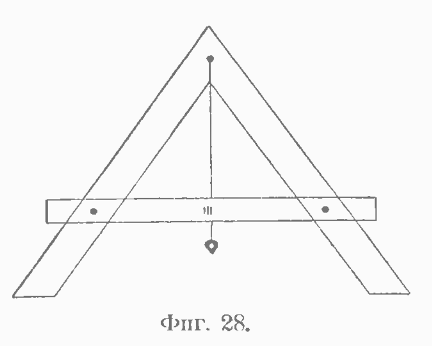
Подыскать доказательство правильности полученнаго рѣшенія—предоставляемъ читателю. Это не трудно.

Задача 32-я.

Устроить хозяйственный уровень.

Изъ трехъ тонкихъ, прямыхъ, хорошо выструганныхъ и съ параллельными краями досокъ можно легко построить приборъ, полезный при многихъ домашнихъ столярныхъ, плотничьихъ и сельско-хозяйственныхъ работахъ. Приборъ носитъ названiе уровня и служитъ для опредѣленiя горизонтальности поверхности въ случаяхъ, когда не требуется слишкомъ большой точности, напримѣръ, при нивеллировкѣ почвы на поляхъ и огородахъ и т. д. Приборъ устраивается такъ:

Полосы изъ тонкихъ дощечекъ скрѣпляются вмѣстѣ, какъ указано на фигурѣ, образуя треугольникъ съ двумя равными сторонами (равнобедренный). Средняя точка основанiя отмѣчена перпендикулярной чертой, а съ противоположной верхушки спускается *отвѣсъ* (нить съ грузомъ).



Фиг. 28.

Если приборъ помѣщенъ такъ, что нить отвѣса совпадаетъ со средней отмѣткой, то, слѣдовательно, полоса основанiя лежитъ горизонтально, будучи перпендикулярной къ линiи отвѣса. Весь приборъ, слѣдовательно, основанъ на томъ, что *линiя, выходящая изъ вершины и дѣлящая пополамъ основанiе равнобедреннаго треугольника, перпендикулярна этому основанiю.*

Въ зависимости отъ длины сторонъ треугольника можно вычислить (или прямо опредѣлить опытнымъ путемъ), какъ дѣленiя вправо и влѣво отъ средняго можно провести на основанiи такъ, чтобы линiя отвѣса, совпадая съ ними, указывала уклоны отъ горизонтальности въ отношенiяхъ 1 на 200, 1 на 100 и т. д.

Синусъ.

Изучающіе тригонометрію задаютъ часто такой вопросъ: «изъ понятія о значеніи линіи, или, точнѣе,—геометрическаго представленія тригонометрическихъ отношеній легко понять, откуда произошли *названія* «тангенса» или «секанса», а также соотвѣтственныхъ имъ функцій дополнительнаго угла («котангенсъ» и «косекансъ»). Но откуда взялось слово *синусъ?* На этотъ вопросъ историки математики Канторъ, Финкъ и Кэджори отвѣчаютъ такъ (хотя Канторъ считаетъ такое рѣшеніе вопроса всетаки сомнительнымъ):

Греки всегда брали полную хорду удвоенной дуги. Индусы, хотя и употребляли въ вычисленіяхъ половину хорды удвоенной дуги (то, что мы называемъ теперь *синусомъ*), но сохранили для этой линіи названіе полной хорды, *Ziva (джива)*, что въ буквальномъ переводѣ означаетъ *тетива*,—самое естественное названіе для хорды.

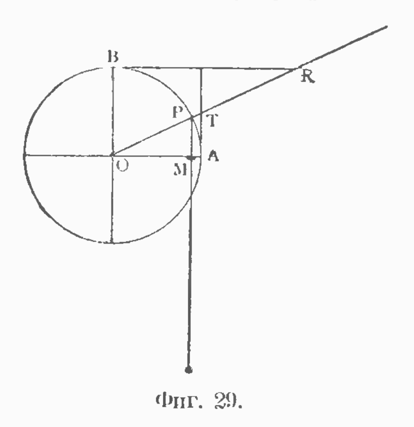
Произведенія индусовъ дошли вначалѣ до насъ черезъ арабовъ. Эти послѣдніе изъ *санскритскаго джива* сдѣлали *джиба*, слово ничего не значущее по-арабски. Но такъ какъ арабы пишутъ безъ гласныхъ буквъ, а только одни согласныя (гласныя у нихъ обозначаются особыми значками, которыя часто опускаются), то съ теченіемъ времени они слово *джиба* передѣлали въ арабское *джаибъ*, писавшееся тѣми же согласными и значившее по-арабски *грудь*. Въ такомъ видѣ это слово встрѣчается въ сочиненіи древнѣйшаго арабскаго астронома Аль-Батани (IX столѣтіе по Р. X.), написавшаго книгу о движеніи небесныхъ тѣлъ.

Въ двѣнадцатомъ столѣтіи этотъ трудъ былъ переведенъ на латинскій языкъ *Платономъ Тибуртинскимъ*, передавшимъ арабское слово *dschaib* дословно латинскимъ *синусъ* (Sinus—грудь). Такъ это совершенно не соотвѣтствующее геометрическому представленію слово и удержалось въ математикѣ до нашихъ дней.

Задача 33-я.

Построить приборъ, наглядно поясняющій тригонометрическія линіи.

Желающій можетъ заняться на-досугѣ устройствомъ рода прибора, наглядно иллюстрирующаго тригонометрическія линіи, представляющія тригонометрическія отношенія. При устройствѣ такого прибора можно руководствоваться нижеслѣдующей общей схемой (см. фиг. 29).



Фиг. 29.

Въ центрѣ O круга укрѣпленъ тонкій стержень (прутъ) OR, который можетъ вращаться. Прутъ, изображающій касательную, привинченъ къ диску въ точкѣ A. Вдоль этого послѣдняго легко скользитъ маленькій блокъ, помѣченный буквой T. Этотъ блочокъ соединенъ со стержнемъ OR такъ, что T обозначаетъ пересѣченіе двухъ линій. Точно также еще маленькій блокъ R можетъ скользить вдоль другого касательнаго тонкаго стержня BR.

Въ мѣстѣ P на единицѣ разстоянія отъ O (т. е. на разстояніи радіуса круга) ввинченъ, или укрѣпленъ какъ либо иначе, другой тоненькій стержень PM. Тяжесть на нижнемъ концѣ этого стержня держитъ его постоянно въ вертикальномъ положеніи. Въ свою очередь онъ свободно проходитъ черезъ блочокъ, свободно скользящій вдоль OA и который обозначенъ на фиг. 29 буквой M.

Пусть, теперь, стержень OR вращается въ положительномъ направленіи (обратномъ движенію часовой стрѣлки); тогда уголъ при O увеличивается, а вмѣстѣ съ тѣмъ:

MP	представитъ	соотвѣтственное	увеличеніе синуса,
OM	»	»	уменьшеніе косинуса,
AT	»	»	увеличеніе тангенса,

BR представитъ соотвѣтственное уменьшеніе котангенса,
OT » » увеличеніе секанса,
OR » » уменьшеніе косеканса.

Преодолѣвшій небольшія сравнительно техническія трудности и внесшій возможныя усовершенствованія въ предлагаемую схему можетъ, мы думаемъ, составить себѣ имя и даже заработать, введя въ школу полезное учебное пособіе.

Задача 34-я.

Устроить приборъ для обращенія кругового движенія въ прямолинейное.

Положимъ, что мы ведемъ карандашомъ, касаясь края какого либо кружка, и такимъ образомъ получаемъ окружность. Въ данномъ случаѣ мы пользуемся, значитъ, однимъ кругомъ для полученія другого. Но для полученія окружности и круговъ у насъ есть и другой инструментъ, не круглый самъ по себѣ, а именно—циркуль.

Если необходимо провести прямую линію, то извѣстный геометрическій постулатъ допускаетъ употребленіе линейки, что требуетъ прямого края для проведенія прямой линіи, т. е. прямая линія получается какъ копія.

Возможно ли устроить приборъ не прямой самъ по себѣ, который могъ бы вычерчивать прямую линію? Такой приборъ впервые былъ изобрѣтенъ офицеромъ инженернаго корпуса французской арміи Поселье (Peaucellier) въ 1864 году. Съ тѣхъ поръ изобрѣтались и другіе подобные приборы, дающіе прямолинейное движеніе, и притомъ приборы болѣе простого устройства, чѣмъ изобрѣтенный Поселье. Но такъ какъ послѣдній изобрѣтенъ раньше, его слѣдуетъ считать за типъ. Замѣтимъ также, что независимо отъ Поселье тотъ же приборъ былъ изобрѣтенъ русскимъ математикомъ Липкинымъ въ 1868 году.

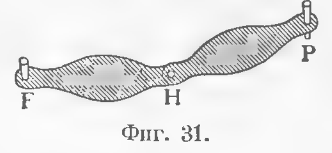
Прежде чѣмъ разсмотрѣть устройство всего инструмента, разсмотримъ одно его звено (фиг. 30), вращающееся на штиф-

тикѣ съ одного конца и съ прикрѣпленнымъ карандашомъ на другомъ. Карандашъ въ этомъ случаѣ описываетъ окружность.

Если два такихъ звена (фиг. 31) соединены въ точкѣ H, а въ точкѣ F прикрѣплены къ плоскости, точка P можетъ двигаться всячески, ея путь неопредѣлененъ. Число звеньевъ должно быть нечетное, чтобы дать опредѣленное движеніе. Если систему изъ трехъ звеньевъ прикрѣпить въ двухъ концахъ, конецъ средняго звена опишетъ опредѣленную кривую—скажемъ петлю. Система изъ пяти звеньевъ уже можетъ дать искомое прямолинейное движеніе. Но аппаратъ Поселье имѣетъ семь звеньевъ.

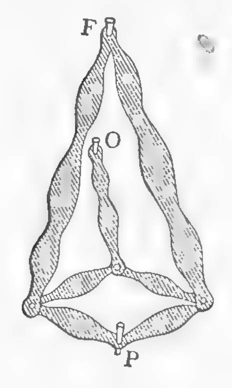


Фиг. 30.

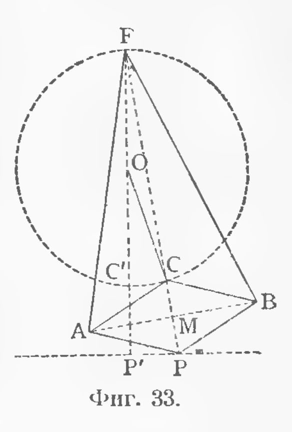


Фиг. 31.

Такой приборъ, какой угодно величины, можетъ быть сдѣланъ каждымъ. Звенья можно вырѣзать изъ картона и скрѣпить ихъ толстыми булавками (см. фиг. 32). Концы F и O (фиг. 32) можно прикрѣпить къ классной доскѣ, а въ P укрѣпить кусокъ карандаша. Такимъ образомъ можно получить полезное и интересное приспособленіе къ уроку геометріи. Фигура 33-я даетъ діаграмму аппарата, изображеннаго на фиг. 32.



Фиг. 32.



Фиг. 33.

Здѣсь $FA = FB$. Во всѣхъ положеніяхъ $APBC$ есть, очевидно, *ромбъ*. F и O прикрѣплены въ точкахъ, разстояніе между которыми равно OC. Въ такомъ случаѣ C двигается по дугѣ круга, центръ котораго есть O. — A и B двигаются по дугѣ, имѣющей центромъ F. Остается показать, что P двигается по прямой линіи.

Проведемъ прямую PP' перпендикулярно къ FO. Уголъ FCC', вписанный въ полукругъ, есть прямой. Значитъ треугольники $FP'P$ и $FC''C$, имѣющіе общій уголъ F, подобны.

$$\text{Слѣдовательно,}\quad FP : FP' = FC' : FC$$
$$\text{и}\qquad FP \cdot FC = FP' \cdot FC'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

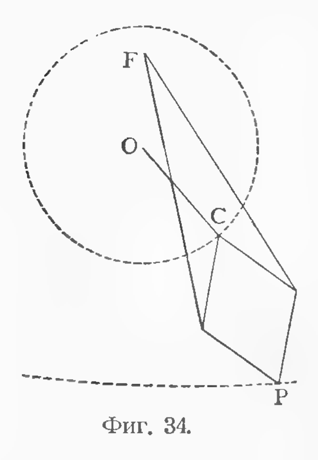
Точки F, C и P, каждая въ отдѣльности, находятся на равномъ разстояніи отъ A и B, а потому, значитъ, лежатъ на одной и той же прямой линіи. Діагонали ромба $APBC$, какъ извѣстно, взаимно перпендикулярны и въ точкѣ пересѣченія дѣлятся пополамъ. Отсюда

$$FB^2 = FM^2 + MB^2$$
$$PB^2 = MP^2 + MB^2$$
$$FB^2 - PB^2 = FM^2 - MP^2$$
$$= (FM + MP)\ (FM - MP)$$
$$= FP \cdot FC\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

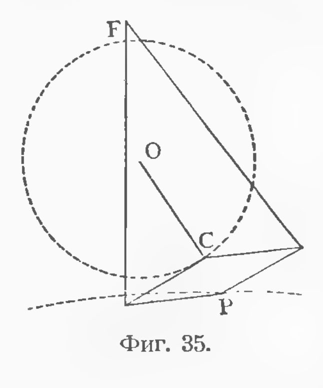
Изъ (1) и (2) заключаемъ, что $FP' \cdot FC' = EP^2 - FB^2$.

Но при движеніи прибора FC', FB и PB всѣ остаются постоянными; слѣдовательно, FP' тоже постоянно. Это значитъ, что P, проэкція точки P на FO, есть всегда одна и та же точка. Или, другими словами, P двигается по *прямой линіи* (перпендикулярной къ FO).

Если разстояніе между двумя означенными точками, F и O, сдѣлать меньше длины звена OC, P будетъ двидаться по дугѣ круга, вогнутой по направленію къ O (фиг. 34). Такъ какъ $OC - OF$ приближается къ нулю, какъ къ предѣлу, радіусъ дуги, вычерчиваемой P, увеличивается безпредѣльно. Если OF сдѣлать больше, чѣмъ OC, то P будетъ описывать дугу, выгнутую относительно O (фиг. 35). Чѣмъ меньше $OF - OC$, тѣмъ болѣе радіусъ дуги, означенной черезъ P.



Фиг. 34.



Фиг. 35.

Отсюда видно, что этотъ небольшой приборъ можетъ быть употребленъ для описанія дуги круга съ огромнымъ радіусомъ и съ центромъ дуги на противоположной сторонѣ отъ инструмента.

Прямая линія—«простѣйшая кривая» математиковъ—лежитъ, такъ сказать, между двумя такими, означенными выше, дугами, и есть предѣльная форма каждой изъ нихъ.

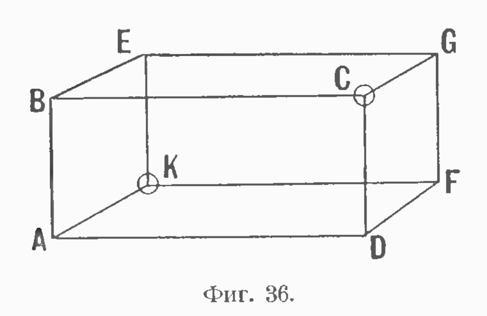
Приборы подобнаго рода обладаютъ многими интересными особенностями. Дальнѣйшей разработкой идеи Поселье занимался извѣстный математикъ Сильвестеръ. А. В. Кемпе (Kempe) въ 1877 году издалъ небольшую книгу, посвященную этому предмету, подъ заглавіемъ *How to draw a straight line* («Какъ провести прямую линію»). Онъ же доказываетъ, что съ помощью подобныхъ сочлененій звеньевъ можно вообще вычертить любую такъ называемую алгебраическую кривую.

Читатель навѣрное не посѣтуетъ на насъ, если самъ займется устройствомъ описаннаго прибора, имѣющаго связь съ существеннѣйшими основами геометріи.

Задача 35-я.

О паукѣ и мухѣ.

На потолкѣ въ углу C комнаты (фиг. 36) сидитъ паукъ, а на полу, въ противоположномъ углу K—



Фиг. 36.

муха. Какой путь долженъ избрать паукъ, чтобы добраться до мухи по кратчайшему разстоянію?

Рѣшеніе.

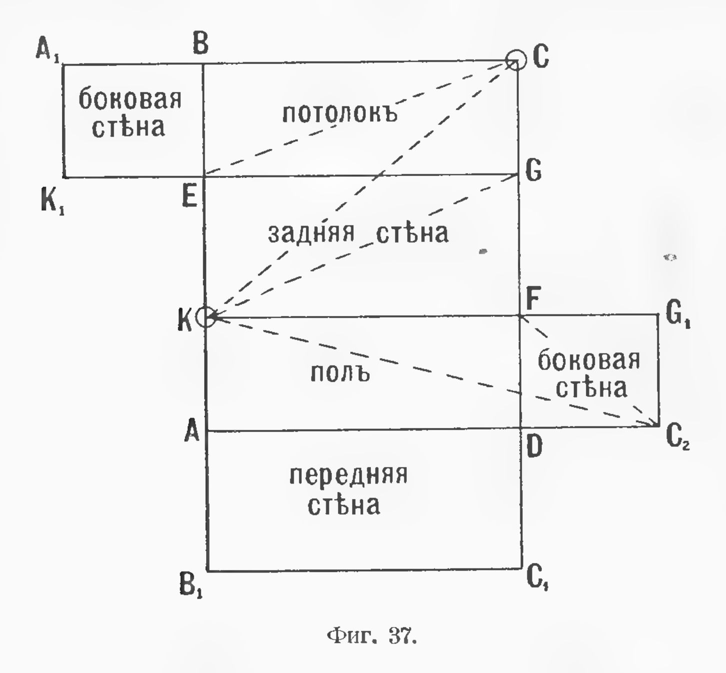
Съ перваго взгляда кажется яснымъ, что паукъ долженъ пробѣжать потолокъ по діагонали *CE* и затѣмъ спуститься къ мухѣ по ребру *EK*—(1-й путь).

Поразмысливши, мы найдемъ для паука и другой «кратчайшій» путь: онъ можетъ пробѣжать боковую стѣну по діагонали *CF* и подобраться къ жертвѣ вдоль *FK*—(2-й путь).

И, наконецъ,—паукъ могъ бы пойти по *CG* и по діагонали *GK*—(3-й путь).

Какой же изъ этихъ трехъ путей является, дѣйствительно, кратчайшимъ?

Оказывается, что ни тотъ, ни другой, ни третій. Есть еще болѣе короткіе пути, и мы займемся ихъ разысканіемъ.



Фиг. 37.

Для этого развернемъ параллелопипедъ, изображающій нашу комнату, на плоскость. Получимъ чертежъ, изображенный фиг. 37-ой. Паукъ сидитъ въ точкѣ *C*, а муха въ точкѣ *K*.

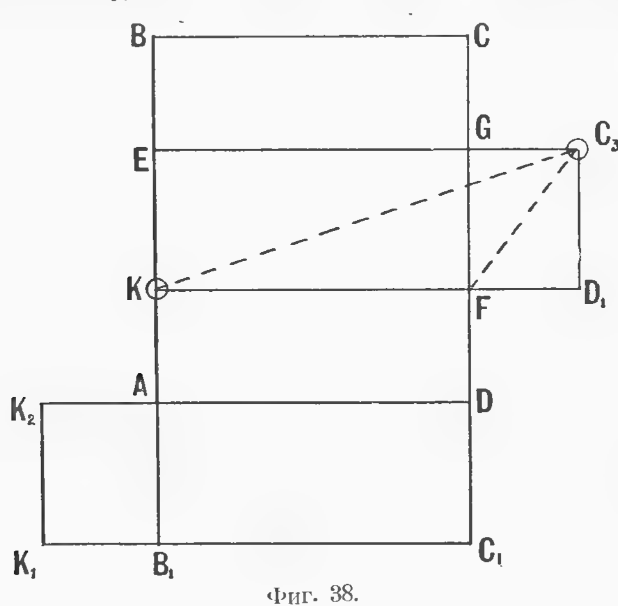
Теперь мы ясно видимъ, что путь *CEK*, который въ неразвернутомъ чертежѣ казался намъ кратчайшимъ, на самомъ

дѣлѣ не является таковымъ. Стоитъ соединить точки C и K прямой линіей, чтобы получить замѣтно болѣе короткій путь. Этотъ новый путь будетъ также короче и пути CGK, какъ видно изъ чертежа.

Далѣе, если предположить, что паукъ сидитъ въ точкѣ C_2 (также отвѣчающей углу C нашего параллелопипеда), то C_2FK будетъ путь, обозначенный нами выше, какъ «2-й путь». Ясно, что онъ больше прямого пути C_2K.

Мы узнали, слѣдовательно, уже два «кратчайшихъ» пути CK и C_2K.

Но это еще не все: есть и третій. Чтобы найти его, развернемъ комнату, какъ показано на фиг. 38-й. Помѣстивъ



Фиг. 38.

мысленно паука въ точку C_3, мы увидимъ, что путь C_3FK (отвѣчающій пути CFK на нашемъ параллелопипедѣ) длиннѣе прямого пути KC_3.

Остается теперь рѣшить вопросъ: какой же изъ этихъ трехъ новыхъ путей будетъ самымъ короткимъ: KC, KC_2 или KC_3?

Оказывается, что это зависитъ отъ относительныхъ размѣровъ комнаты въ длину, ширину и высоту,—какъ легко видѣть изъ слѣдующаго.

Обозначимъ длину комнаты AD черезъ a, высоту AB черезъ b и ширину AK черезъ c. Тогда изъ черт. 37 и 38 имѣемъ.

$$KC = \sqrt{\overline{KF}^2 + \overline{CF}^2} = \sqrt{a^2 + (b+c)^2}$$

$$KC_2 = \sqrt{\overline{AK}^2 + \overline{AC_2}^2} = \sqrt{c^2 + (a+b)^2}$$

$$KC_3 = \sqrt{\overline{KD}^2 + \overline{C_3D_1}^2} = \sqrt{b^2 + (a+c)^2}$$

Сравнивая между собой подрадикальныя количества, мы увидимъ по раскрытіи скобокъ, что онѣ отличаются другъ отъ друга лишь членами

$$2bc,\ 2ab \text{ и } 2ac;$$

отъ соотношенія этихъ произведеній и зависятъ сравнительныя длины линій KC, KC_2 и KC_3.

Дѣля всѣ три произведенія на $2abc$, получимъ

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{c} \text{ и } \frac{1}{b}$$

Отсюда видно, что если $a > b$ и $a > c$, то кратчайшимъ путемъ будетъ KC.

Если $b > a$ и $a > c$, кратчайшій путь KC_2, и если $c > b$ и $c > a$, кратчайшій путь KC_3.

Мы видимъ, что задача о паукѣ и мухѣ оказалась гораздо сложнѣе, чѣмъ можно было думать съ перваго взгляда. Читатель, можетъ быть, полюбопытствуетъ узнать, какъ сами пауки рѣшаютъ эту задачу. Къ сожалѣнію, намъ никогда не приходилось наблюдать пауковъ при такихъ обстоятельствахъ, да и болѣе чѣмъ сомнительно, чтобы паукъ могъ замѣтить муху изъ одного угла комнаты въ другомъ.

Объясненіе симметріи посредствомъ сложенія бумаги.

Простое приспособленіе даетъ возможность начинающимъ получить понятіе о симметріи съ вѣрностью и правильностью, какихъ не дастъ никакое словесное объясненіе.

Предложите каждому взять листъ вощеной (такъ называемая калька), или проклеенной, бумаги, сложить ее одинъ разъ, затѣмъ снова выпрямить, быстро начертить чернилами на одной половинѣ какую нибудь фигуру и быстро, чтобы чернила не успѣли просохнуть, сложить опять вмѣстѣ. Рисунокъ на одной сторонѣ и отпечатокъ его на другой будутъ симметричны до мельчайшихъ подробностей, при чемъ сгибъ бумаги и есть такъ называемая *ось симметріи.*

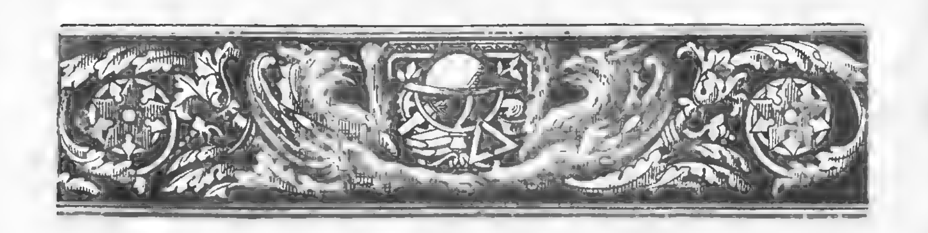
Еще: сложите бумагу въ двѣ перпендикулярныя складки (вчетверо—вдоль и поперекъ). Въ одной изъ полученныхъ «четвертей» куска бумаги нарисуйте фигуру такъ, чтобы два конца ея упирались каждый въ одинъ сгибъ. Быстро вновь сложите бумагу такъ, чтобы получился отпечатокъ въ каждомъ изъ остальныхъ квадратовъ. Полученная замкнутая фигура будетъ симметрична по отоношенію къ пересѣченію сгибовъ, какъ ея центру.

Вмѣсто простыхъ чернилъ еще лучше чертить такъ называемыми «копировальными» чернилами или копировальнымъ карандашомъ и, перегнувъ бумагу, смочить ее.

Т. Сундара Роу, въ своемъ трудѣ «*Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги* [1]), указалъ, какъ можно строить очень много фигуръ плоской геометріи съ помощью перегибанія бумаги. Здѣсь же находятся прекрасныя изображенія нѣкоторыхъ правильныхъ многоугольниковъ, а также даются способы опредѣленія точекъ нѣкоторыхъ кривыхъ высшаго порядка на плоскостяхъ.



[1]) Есть въ переводѣ на русскій языкъ въ изданіи одесскаго книгоиздательства «Mathesis».



О пространствѣ четырехъ измѣреній.

Редакціи научнаго американскаго журнала «Scientific American» пришла въ голову счастливая мысль объявить всемірный конкурсъ на соисканіе преміи въ 500 долларовъ (около 1000 руб. на наши деньги). Эта довольно значительная премія выдавалась за наилучшую представленную редакціи статью о четвертомъ измѣреніи, при чемъ такая статья, не теряя въ научности, должна была быть по возможности *общедоступна* по изложенію и невелика по размѣрамъ (не болѣе обыкновеннаго печатнаго листа). Въ качествѣ судей представляемыхъ работъ были приглашены извѣстные ученые и профессора.

Въ результатѣ конкурса — въ іюлѣ 1909 г. въ «Scientific American» были напечатаны о четвертомъ измѣреніи три замѣчательныхъ, увѣнчанныхъ преміями и почетными отзывами, статьи, принадлежащія Грагаму Денби Фичу (Graham Demby Fitch), Ф. К. Ферри (F. C. Ferry) и Карлу А. Ричмонду (Carl A. Richmond). Приводимъ ниже переводъ этихъ трехъ статей, нисколько не сомнѣваясь, что чтеніе ихъ доставитъ живѣйшее удовольствіе каждому, кто «Въ царствѣ смекалки» ищетъ не одного только забавнаго «препровожденія времени».

Статьи эти, взаимно дополняющія и освѣщающія одна другую, точно также прекрасно развиваютъ и дополняютъ то, что

сказано уже нами о четвертомъ измѣреніи во второй нашей книгѣ. Читатель легко убѣдится самъ, что для чтенія ихъ не требуется никакой особой математической подготовки, кромѣ пониманія самыхъ элементарныхъ основъ геометріи. Можно сказать, пожалуй, что приступить къ чтенію этихъ статей и вполнѣ овладѣть ихъ содержаніемъ будетъ легко, если уяснить себѣ что такое точка, прямая линія, квадратъ и кубъ, и запомнить принятыя въ геометріи названія элементовъ, входящихъ въ эти фигуры. Разсужденіе К. А. Ричмонда требуетъ также понятія объ уравненіяхъ. Вотъ и все, что требуется для того, чтобы преодолѣть нижеслѣдующія страницы и вмѣстѣ съ тѣмъ сразу поразительно раздвинуть и углубить свое пониманіе геометрическихъ основъ и взглядовъ на ученіе о пространствѣ вообще. Въ самой доступной и, можно сказать, наглядной формѣ математика соприкасается здѣсь съ тончайшими отвлеченіями философіи и съ теоріей познаванія въ частности. Вотъ почему кажется вполнѣ умѣстнымъ въ концѣ этого отдѣла помѣстить небольшіе отрывки изъ «Критики чистаго разума» Канта, въ которыхъ излагаются взгляды этого величайшаго мыслителя всѣхъ временъ на пространство, а также на время. Разсужденіе объ этомъ послѣднемъ не входитъ прямо въ нашу задачу. Но разъ «царство смекалки» приводитъ насъ къ области философіи познанія, то было бы упущеніемъ не упомянуть кстати, наряду съ пространствомъ, и о *времени*, какъ *категоріи* нашего познанія. Для дополненія и разъясненія отрывковъ изъ Канта приводимъ также два параграфа изъ трактата Н. Н. Шиллера «*Значеніе понятій о «силѣ» и о «массѣ»*». Это небольшое глубоко ученое сочиненіе, появившееся первоначально въ «Кіевскихъ Университетскихъ Извѣстіяхъ» въ 1898 году, мы настойчиво рекомендовали бы для прочтенія всякому желающему расширить свой естественнонаучный кругозоръ. Почтемъ себя удовлетворенными, если приведенные отрывки побудятъ кого-либо къ чтенію полныхъ сочиненій.

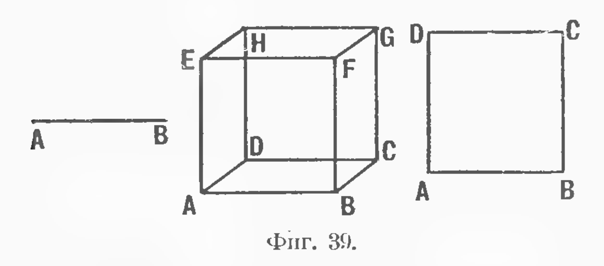
Въ заключеніе этого небольшого вступленія въ настоящій отдѣлъ прибавимъ, что о «четвертомъ измѣреніи» и о «пространствѣ четвертаго измѣренія» разсѣяно въ нашемъ обществѣ довольно много и довольно таки смутныхъ, а часто мистическихъ

и просто нелѣпыхъ толковъ и представленій. Появляющіяся на этотъ счетъ книги и брошюрки обыкновенно еще болѣе сбиваютъ читателя съ толку... Задача истиннаго знанія состоитъ прежде всего въ томъ, чтобы въ область мрака и тумана внести лучи свѣта и во все вникающей трезвой мысли. Быть можетъ, многія вещи теряютъ при этомъ значительную часть своей мистической «прелести» и «таинственности», но несомнѣнно, что они выигрываютъ въ смыслѣ остроумія, ясности и простоты.

О четвертомъ измѣреніи.

(F. E. Ferry).

Ученикъ обыкновенно знакомится съ линейными мѣрами, затѣмъ съ квадратными и, наконецъ, съ кубическими мѣрами, или мѣрами тѣлъ. Онъ усваиваетъ ихъ себѣ соотвѣтственно, какъ «измѣренія длины», затѣмъ «мѣры площадей, или поверхностей, которыя зависятъ отъ длины и ширины, взятыхъ вмѣстѣ», и, наконецъ, «мѣры объемовъ, или тѣлъ, которыя зависятъ отъ длины, ширины и высоты, взятыхъ вмѣстѣ». Первое заключаетъ въ себѣ одно измѣреніе — длину; второе — два



Фиг. 39.

взаимно-перпендикулярныхъ измѣренія — длину и ширину, перемноженныхъ одно на другое, и третье — три измѣренія, каждое перпендикулярное двумъ другимъ — длину, ширину и высоту, всѣ взаимно перемноженныя. Пусть единицы этихъ трехъ родовъ измѣренія (напримѣръ, футъ, квадратный футъ и кубическій футъ) будутъ изображены линіей *AB*, квадратомъ *ABCD* съ той же линіей, какъ стороной, и кубомъ *ABCD-G* съ той же линіей (ребромъ) и тѣмъ же квадратомъ, какъ основаніемъ (фиг. 39).

Единица AB может быть разсматриваема, как составленная изъ безконечно большого числа M точекъ, непрерывно слѣдующихъ одна за другой отъ A къ B. Квадратъ $ABCD$ въ такомъ случаѣ содержитъ $M \times M = M^2$ точекъ, а кубъ $ABCD$-G содержитъ $M \times M \times M = M^3$ точекъ. Можно идти отъ одной точки на AB ко всякой другой точкѣ въ ней, придерживаясь только одного принятаго направленія по AB. Точно также, отъ одной какой-нибудь точки ко всякой другой въ $ABCD$ можно достичь, придерживаясь двухъ направленій, опредѣленныхъ линіями, ограничивающими квадратъ. Точно также въ $ABCD$-G любая точка достигается изъ начальной движеніемъ въ трехъ направленіяхъ, опредѣляемыхъ 3-мя ребрами куба, выходящими изъ одной точки (вершины куба). Отсюда, въ зависимости отъ движенія отъ одной точки до другой, первая единица будетъ одномѣрная, вторая—двухмѣрная, третья—трехмѣрная.

Человѣкъ не можетъ сдѣлать движенія, которое не могло бы разложиться по тремъ взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ. Онъ не можетъ достигнуть никакого мѣста иначе, какъ идя на сѣверъ или югъ, западъ или востокъ, а также вверхъ или внизъ. Онъ не можетъ найти ни одной точки въ комнатѣ, которой не могъ бы достигнуть движеніемъ въ направленіяхъ длины, ширины и высоты комнаты. Зрѣніе различаетъ правильно два измѣренія, ширину и высоту видимаго предмета, между тѣмъ какъ третье измѣреніе, разстояніе отъ предмета, опредѣляется посредствомъ мускульнаго поворота глазъ для сосредоточенія ихъ на немъ. Нѣтъ, казалось бы, смысла требовать четвертаго направленія, перпендикулярнаго къ тремъ упомянутымъ. Фактически весь человѣческій опытъ заставляетъ насъ удовлетворяться тремя измѣреніями.

Оставляя опытъ въ сторонѣ и размышляя всецѣло по аналогіи, четвертое измѣреніе вводится съ помощью такого разсужденія: четырехмѣрное измѣреніе зависитъ отъ длины, ширины, высоты и четвертаго измѣренія, взаимно перемноженныхъ. Оно заключаетъ въ себѣ четыре линейныхъ измѣренія, каждое изъ которыхъ перпендикулярно къ тремъ остальнымъ. Слѣдовательно, четвертое измѣреніе составляетъ прямой уголъ съ каждымъ изъ трехъ измѣреній трехмѣрнаго пространства. Его единица должна

имѣть AB, какъ ребро, квадратъ $ABCD$, какъ грань, и кубъ $ABCD$-G, какъ основаніе. Онъ содержитъ $M \times M \times M \times M = M^4$ точекъ. Переходъ отъ одной точки ко всякой другой точкѣ въ этомъ пространствѣ 4-хъ измѣреній возможенъ при движеніи въ четырехъ направленіяхъ, опредѣляемыхъ этими 4-мя линіями.

Квадратъ $ABCD$ (фиг. 39) можетъ быть образованъ линіей AB,—передвиженіемъ AB съ ея M точками на разстояніе въ одинъ футъ въ направленіи, перпендикулярномъ къ одному измѣренію AB. Всякая точка AB въ этомъ движеніи описываетъ линію, и $ABCD$ содержитъ, слѣдовательно, M линій, такъ же, какъ M^2 точекъ. Кубъ $ABCD$-G образуется квадратомъ $ABCD$ при движеніи его на разстояніи въ одинъ футъ въ направленіи, перпендикулярномъ къ его двумъ измѣреніямъ. M линій и M^2 точекъ квадрата описываютъ соотвѣтственно M квадратовъ и M^2 линій. Согласно этому $ABCD$-G содержитъ M квадратовъ, M^2 линій и M^3 точекъ. Подобнымъ же образомъ, четырехмѣрная единица получается изъ куба $ABCD$-G при движеніи его на разстояніе одного фута въ направленіи, перпендикулярномъ къ каждому изъ его трехъ измѣреній, т. е. «въ направленіи четвертаго измѣренія». Его M квадратовъ, M^2 линій и M^3 точекъ описываютъ при этомъ соотвѣтственно M кубовъ, M^2 квадратовъ и M^3 линій.

Согласно съ такимъ опредѣленіемъ единица четвертаго измѣренія содержитъ M кубовъ, M^2 квадратовъ, M^3 линій и M^4 точекъ.

Разсматривая предѣлы единицъ, мы видимъ, что AB имѣетъ предѣлами двѣ точки. $ABCD$ имѣетъ такихъ предѣльныхъ точекъ (вершинъ квадрата) четыре; $ABCD$-G имѣетъ такихъ точекъ (вершинъ куба) восемь — четыре отъ начальнаго и 4 отъ конечнаго положеній двигающагося квадрата. Наконецъ, для четырехмѣрной единицы такихъ предѣльныхъ точекъ должно получиться 16 (изъ нихъ 8 отъ начальнаго и 8 отъ конечнаго положенія перемѣстившагося куба).

Для предѣльныхъ *линій* мѣръ получимъ: AB имѣетъ одну линію (или —она сама по себѣ одна), $ABCD$ ограниченъ четырьмя линіями (стороны квадрата), $ABCD$-G ограниченъ двѣнадцатью ребрами (по четыре отъ каждаго начальнаго и окон-

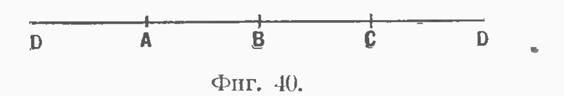
чательнаго положеній двигающагося квадрата и четыре, описанныя четырьмя вершинами переместившагося квадрата).

Наконецъ, для четырехмѣрной единицы число ограничивающихъ ея линій (реберъ) равно 32, а именно: по 12 реберъ даетъ каждое начальное и конечное положенія перемѣстившагося куба, да еще 8 реберъ опишутъ 8 точекъ (вершинъ) перемѣстившагося въ 4-е измѣреніе куба.

Точно также для числа ограничивающихъ мѣры *квадратныхъ граней* имѣемъ: $ABCD$ самъ по себѣ составляетъ одинъ квадратъ. Кубъ $ABCD$-G имѣемъ 6 такихъ квадратовъ-граней (2 квадрата отъ начальнаго и конечнаго положеній перемѣстившагося квадрата и 4 квадрата описаны его сторонами при перемѣщеніи). Наконецъ, 4-мѣрная единица такихъ квадратныхъ граней имѣетъ 24 (12 квадратовъ отъ начальнаго и конечнаго положеній куба да его 12 реберъ опишутъ еще 12 квадратовъ).

Въ концѣ концовъ, для числа ограничивающихъ мѣры *кубовъ* имѣемъ: $ABCD$-G самъ по себѣ одинъ кубъ, а четырехмѣрная единица имѣетъ восемь предѣльныхъ кубовъ (по одному отъ начальнаго и конечнаго положеній движущагося куба да 6 кубовъ, описанныхъ гранями движущагося по направленію 4-го измѣренія куба).

Если линіи, ограничивающія квадратъ $ABCD$, предположить сдѣланными изъ сплошной проволоки и разрѣзать эту проволоку въ D, то эти линіи можно, очевидно, тогда разогнуть всѣ вдоль по направленію AB, образуя такимъ образомъ одномѣрную фигуру (фиг. 40), равную четыремъ линейнымъ единицамъ.

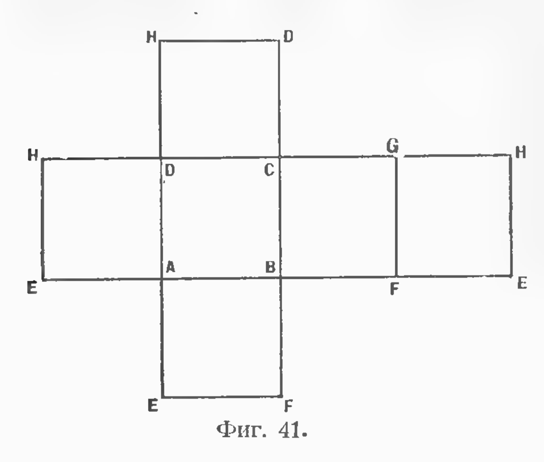


Фиг. 40.

Получится по линейной единицѣ по обѣ стороны AB да еще внѣ ихъ линейная единица CD съ какой либо стороны (у насъ справа).

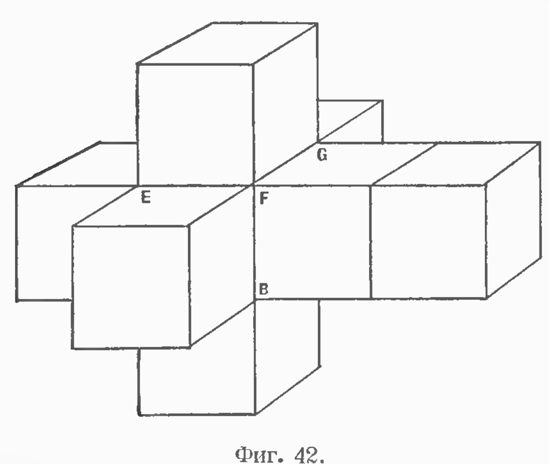
Если въ кубѣ $ABCD$-G предположить квадратныя его грани сдѣланными изъ пластинокъ олова, и эти пластинки обрѣзать вдоль линій EF, GH, HE, AE, BF, CG и DH, то квадратныя грани ихъ могутъ быть сложены такъ, чтобы образовать одну двухмѣрную фигуру изъ шести квадратовъ. Квадратъ

ABCD имѣетъ по квадрату на каждой своей сторонѣ да кромѣ того одинъ, *EFGH*, внѣ этихъ съ какой-либо стороны (фиг. 41).



Фиг. 41.

Точно также, если въ четырехмѣрной единицѣ представить ея предѣльные кубы сдѣланными изъ сплошного дерева, и это дерево обрѣзать затѣмъ въ соотвѣтствующихъ плоскостяхъ, то кубы могутъ быть сложены такъ, чтобы образовать, по аналогіи съ предыдущимъ, трехмѣрную фигуру изъ восьми кубовъ. Кубъ *ABCD-G* (центральный) имѣетъ по кубу на каждой своей сторонѣ и кромѣ того одинъ кубъ сбоку, внѣ его сторонъ



Фиг. 42.

(фиг. 42). Эти восемъ кубовъ, образуя теперь трехмѣрную фигуру, составляли, какъ мы предполагаемъ, какую-то поверхность, ограничивающую четырехмѣрную единицу.

Въ слѣдующихъ табличкахъ сдѣлана сводка результатовъ, полученныхъ выше для объема и границъ четырехъ разсматриваемыхъ здѣсь единицъ:

Объемы

	Точекъ.	Линій.	Квадратовъ.	Кубовъ.
Одномѣрная единица	M	1	0	0
Двухмѣрная единица	M^2	M	1	0
Трехмѣрная единица	M^3	M^2	M	1
Четырехмѣрная единица . .	M^4	M^3	M^2	M

Границы

	Точекъ.	Линій.	Квадратовъ.	Кубовъ.
Одномѣрная единица . . .	2	1	0	0
Двухмѣрная единица . . .	4	4	1	0
Трехмѣрная единица . . .	8	12	6	1
Четырехмѣрная единица .	16	32	24	8

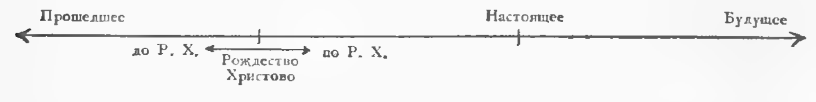
Разсуждая совершенно подобно предыдущему, можно перейти отъ разсмотрѣнныхъ единицъ къ единицамъ пяти и болѣе измѣреній.

Если одномѣрную единицу продолжить безконечно вправо отъ B и влѣво отъ A такъ, что ея длина сдѣлается больше, чѣмъ можно обозначить какимъ угодно числомъ,—она будетъ представлять одномѣрное пространство вообще. Такимъ же образомъ, безконечно большое продолженіе по всѣмъ измѣреніямъ другихъ единицъ дастъ соотвѣтственное представленіе о двухмѣрномъ, трехмѣрномъ и четырехмѣрномъ пространствахъ.

Одномѣрная единица выдѣлена изъ остального одномѣрнаго пространства, въ которомъ она лежитъ, двумя точками. Двухмѣрная единица—отъ остального ея двухмѣрнаго пространства отдѣлена четырьмя линіями. Трехмѣрная единица выдѣляется изъ остального ея трехмѣрнаго пространства шестью площадями-квадратами; и, наконецъ, четырехмѣрная единица выдѣляется изъ остального четырехмѣрнаго пространства (сверхпространства), въ которомъ она лежитъ, восемью кубами.

Чтобы получить замкнутую фигуру какого-либо измѣренія въ пространствѣ того же измѣренія, требуется: въ одномѣрномъ пространствѣ двѣ точки, въ двухмѣрномъ — по крайней мѣрѣ три линіи, въ трехмѣрномъ—по крайней мѣрѣ четыре плоскости, въ четырехмѣрномъ—по крайней мѣрѣ пять трехмѣрныхъ пространствъ.

То, что говорилось о единицахъ различныхъ измѣреній, относится и къ соотвѣтствующимъ пространствамъ. Отъ каждой точки можно перейти къ другой точкѣ въ томъ же пространствѣ движеніемъ въ столькихъ опредѣленныхъ направленіяхъ, перпендикулярныхъ каждое къ остальнымъ, сколько измѣреній имѣетъ данное пространство. Время представляетъ одномѣрное пространство, какъ какъ оно продолжается только въ одномъ направленіи отъ безконечного отдаленія прошедшаго къ безконечному разстоянію будущаго (фиг. 43). Настоящее есть точка,



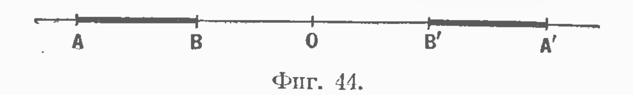
Фиг. 43.

текущая по времени (или допускающая время скользить мимо себя) съ равномѣрной скоростью; и каждая точка во времени можетъ быть достигнута движеніемъ черезъ опредѣленное пространство (въ годахъ, мѣсяцахъ и т. д.), исходя отъ напередъ избранной извѣстной точки (напр. отъ Р. Х.).

Каждая часть земной поверхности, разсматриваемая какъ плоскость, представляетъ часть двухмѣрнаго пространства, а два принятыхъ здѣсь направленія суть широта и долгота. Иллюстраціей трехмѣрнаго пространства служитъ то пространство (по понятіямъ человѣческимъ), въ которомъ находится вселенная. Для четырехмѣрнаго пространства у человѣка никакихъ иллюстрацій и наглядныхъ представленій нѣтъ.

Если двѣ линіи, AB и $B'A'$, въ томъ же самомъ одномѣрномъ пространствѣ симметричны относительно точки O того же пространства (фиг. 44), то AB не можетъ передвинуться въ этомъ же пространствѣ такъ, чтобы *соотвѣтствующія* одновременно точки совпали (A съ A', B съ B' и т. д.). Чтобы достигнуть такого

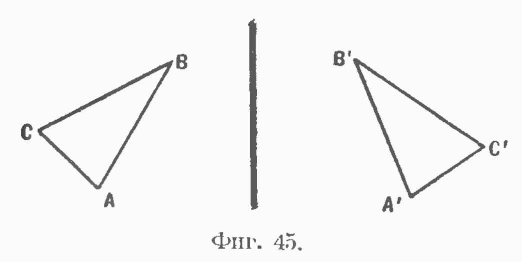
совпаденія, необходимо вращать AB черезъ двухмѣрное пространство около O, какъ центра; или, говоря грубо, AB должна



Фиг. 44.

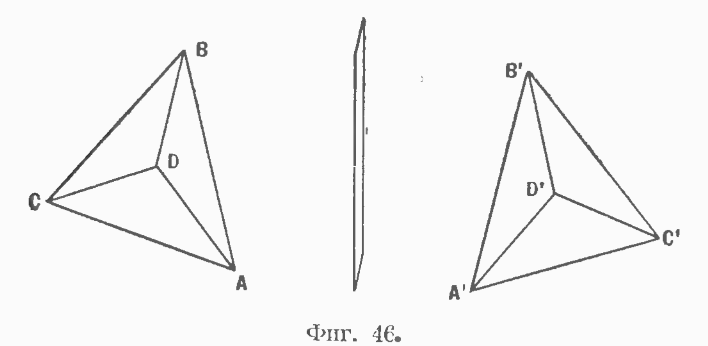
быть взята въ двухмѣрное пространство, перевернута и опущена внизъ на $B'A'$.

Если два треугольника, въ двухмѣрномъ пространствѣ, симметричны относительно нѣкоторой линіи (фиг. 45), то полное



Фиг. 45.

совпаденіе *соотвѣтственныхъ* точекъ и линій этихъ треугольниковъ можетъ быть достигнуто только при вращеніи одного треугольника черезъ трехмѣрное пространство около линіи (оси) симметріи; или, говоря грубо, одинъ треугольникъ долженъ быть взятъ въ трехмѣрное пространство, перевернутъ и опущенъ внизъ на другой. Опять, если два многогранныхъ тѣла въ одномъ и томъ же трехмѣрномъ пространствѣ симметричны



Фиг. 46.

относительно нѣкоторой плоскости (фиг. 46), то совпаденіе *соотвѣтственныхъ* точекъ, линій и плоскостей можетъ быть

достигнуто только при вращеніи одной многогранной фигуры черезъ четырехмѣрное пространство около плоскости симметріи; или, говоря грубо, одна изъ многогранныхъ фигуръ должна быть взята въ четырехмѣрное пространство, перевернута тамъ и положена на другую.

Правая рука и ея отраженіе (лѣвая рука) въ зеркалѣ симметричны относительно плоскости зеркала, и только вращеніемъ около этой плоскости будетъ достигнуто ихъ совпаденіе. Подобное же вращеніе можетъ сдѣлать правую перчатку лѣвой; или, говоря грубо, правая перчатка, брошенная по направленію четвертаго измѣренія и тамъ перевернутая, упадетъ къ намъ назадъ лѣвой перчаткой.

Неспособность человѣка умѣстить въ своемъ представленіи четвертое измѣреніе или обнаружить существованіе четырехмѣрнаго пространства можно сравнить съ подобной же неспособностью «двухмѣрнаго человѣка», живущаго въ двухмѣрномъ пространствѣ, понять третье измѣреніе или обнаружить трехмѣрное пространство, хотя его собственное пространство можетъ быть только частью того, какъ плоскость часть тѣла. Предположимъ двухмѣрное пространство, изображаемое этой страницей книги, обитаемымъ двухмѣрными существами. Они имѣютъ длину и ширину, могутъ двигаться въ этихъ двухъ измѣреніяхъ и, предполагается, сознаютъ ихъ. Они не имѣютъ объема, не могутъ подняться отъ бумаги или опуститься подъ нее и не сознаютъ измѣреній въ такомъ направленіи, они не знаютъ «низа» и «верха». Пусть они интеллигентны въ предѣлахъ ихъ пространства, какъ человѣкъ интеллигентенъ въ предѣлахъ своей вселенной; пусть у нихъ есть дома и житницы, вообще пусть ихъ жизнь богата, насколько можетъ быть. Ихъ дома и житницы не будутъ имѣть ни потолка ни пола, потому что трехъ линій достаточно въ этомъ мірѣ, чтобы замкнуть каждый предметъ; и человѣкъ плоскости самъ по себѣ также расположенъ только въ своемъ многоугольномъ плоскомъ контурѣ. Внутрь этого многоугоульника (его собственная внутренность), по мнѣнію существа плоскости, можно пройти только черезъ его контуръ, такъ какъ нѣтъ верха и нѣтъ низа въ его сознаніи. Было бы безнадежной попыткой убѣдить его, что существуетъ третье

измѣреніе «верха» и «низа», касающееся даже внутренности его многоугольнаго плоскаго «тѣла»—его собственныхъ внутреннихъ частей. Если бы даже онъ принялъ доказательства аналогіи объ особенностяхъ такого измѣренія, то возмутился бы противъ мысли заглянуть въ самого себя, чтобы найти тамъ такое измѣреніе. Если кто нибудь объяснитъ человѣку плоскости, что существо третьяго измѣренія, приближаясь отъ направленія этого неизвѣстнаго ему третьяго измѣренія, можетъ проникнуть въ хорошо запертую житницу и взять ея содержимое, не отпирая замка и не ломая стѣны, человѣкъ плоскости все же не будетъ ближе къ понятію этого третьяго измѣренія. Не пойметъ онъ также его и въ томъ случаѣ, если кто нибудь скажетъ ему, что трехмѣрное существо можетъ коснуться его собственнаго сердца, не проникая черезъ кожу. Совершенно такъ же невозможно для человѣка понять, изъ какого направленія четырехмѣрный грабитель долженъ придти, чтобы украсть сокровища изъ его крѣпчайшаго подвала, не открывая и не ломая ничего; или, какимъ путемъ можетъ приблизиться четырехмѣрный врачъ и коснуться сокровеннѣйшаго мѣста человѣческаго сердца. не нарушая цѣлости кожи, тѣла и даже стѣнокъ сердца. А путь какъ подобнаго грабителя, такъ и врача, лежитъ—вдоль четвертаго измѣренія. Такимъ же путемъ четырехмѣрное существо можетъ придти и удалить содержимое яйца безъ поврежденія скорлупы, или выпить ликеръ, не открывая бутылки. Такія четырехмѣрныя существа, обитающія въ пространствѣ, заключающемъ въ себѣ наше трехмѣрное пространство, могутъ представляться людямъ въ видѣ болѣе совершенныхъ духовъ. Но отсутствіе подобныхъ духовъ болѣе всего говоритъ противъ существованія четыремѣрнаго пространства. Алгебра требуетъ, чтобы геометрія изображала всѣ ея задачи. Разъ алгебраическая задача можетъ содержать четыре, пять или болѣе неизвѣстныхъ чиселъ, равно какъ и меньшее количество ихъ, алгебра требуетъ четырехмѣрнаго, пятимѣрнаго или еще высшаго пространства. Они ей нужны для использованія такъ же, какъ и пространства низшихъ измѣреній.

Быть можетъ, нѣкоторыя явленія молекулярной физики или механическихъ принциповъ электрическаго тока могутъ быть

вполнѣ объяснены только введеніемъ четвертаго измѣренія. Можетъ быть, четвертое измѣреніе ускользаетъ отъ человѣческаго наблюденія только потому, что измѣренія въ этомъ направленіи всегда слишкомъ незначительны въ сравненіи съ мѣрами въ трехъ другихъ измѣреніяхъ.

До сихъ поръ, какъ бы то ни было, пространство четырехъ или еще бо̀льшаго числа измѣреній могло быть только «фиктивнымъ геометрическимъ изображеніемъ алгебраическаго тождества».

Опытъ разсужденія о четвертомъ измѣреніи.

(*Carl A. Richmond*).

Рой пчелъ, помѣщенный въ стеклянномъ ульѣ такъ, что можно наблюдать движеніе каждой пчелы, представляетъ весьма поучительное зрѣлище для изслѣдователя природы. Такой же стеклянный улей можетъ служить хорошимъ пособіемъ для разсмотрѣнія четвертаго измѣренія.

Вообразимъ улей съ поломъ и потолкомъ изъ горизонтальныхъ и параллельныхъ стеколъ, помѣщенныхъ на такомъ близкомъ разстояніи, что пчелы могутъ двигаться *только* въ узкомъ пространствѣ между ними. Вообразимъ также въ цѣляхъ наглядности, что пчелы обладаютъ разумомъ людей. Живущимъ въ такихъ условіяхъ пчеламъ могутъ быть знакомы только представленія о движеніи взадъ и впередъ, вправо и влѣво. Ихъ міръ былъ бы *только двухмѣрный*. Лишенныя движенія вверхъ и внизъ тѣсно сложенными стеклами, онѣ не могутъ понимать словъ «вверхъ» и «низъ», потому что у нихъ нѣтъ опыта, на которомъ они могли бы основывать эти представленія. Какъ ни мало достаточенъ, вообще говоря, взятый нами примѣръ, онъ даетъ все же представленіе о мірѣ только двухъ измѣреній—длины и ширины.

Планиметрія (геометрія на плоскости) есть наука, имѣющая дѣло съ такими фигурами, какъ треугольники, четыреугольники и круги. Интересно, что она зародилась въ Египтѣ, гдѣ развивалась въ цѣляхъ облегченія измѣренія страны. Отъ этого

происхожденія науки произошло и ея названіе—геометрія, что значитъ измѣреніе земли. Со времени ея египетской эры наука подъ именемемъ геометріи тѣлъ (геометрія въ пространствѣ) развилась до изученія такихъ фигуръ, какъ сфера (шаръ), кубъ, конусъ и т. д.

Пчелы во взятомъ стеклянномъ ульѣ могутъ двигаться по квадрату, могутъ дѣлать треугольники и круги, и для нихъ планиметрія можетъ быть практической наукой, но при незнаніи направленія вверхъ и внизъ кубъ и шаръ будутъ для нихъ непонятны. Третье измѣреніе будетъ для нихъ такимъ же абсурдомъ, какимъ является для насъ четвертое.

Предположимъ, что мы положили на столъ два пера такъ, чтобы они одно съ другимъ образовали прямой уголъ; затѣмъ, приставимъ къ нимъ третье перо такъ, чтобы оно образовало съ двумя другими тоже прямой уголъ. Это ясно и возможно сдѣлать для насъ, но это было бы невозможно для пчелъ съ ихъ незнаніемъ 3-го измѣренія—высоты. Они, безъ сомнѣнія, могутъ положить два тонкихъ пера въ своемъ ульѣ такъ, что, пересѣкаясь, они образуютъ прямой уголъ, но третьяго пера для образованія прямого угла съ двумя первыми они поставить не могутъ.

Мы можемъ разсматривать эти два пера, какъ представляющія два измѣренія міра пчелъ, а три взаимно-перпендикулярныхъ пера, какъ изображеніе трехъ измѣреній нашего міра. Предположимъ дальше, что кто нибудь предлагаетъ намъ къ этимъ перьямъ приставить четвертое такъ, чтобы составить прямой уголъ съ каждымъ изъ прежнихъ трехъ. Въ нашемъ полѣ опыта мы не можемъ найти мѣста для него такъ же, какъ пчелы въ ихъ полѣ опыта не могутъ найти мѣста для третьяго пера. Это четвертое перо представляетъ такъ называемое четвертое измѣреніе. Но, хотя для насъ нѣтъ возможности поставить четвертое перо требуемымъ образомъ, примѣръ отношенія къ третьему измѣренію пчелъ указываетъ намъ, что ограниченіе опыта не даетъ еще права окончательно утверждать, сколько измѣреній имѣетъ пространство.

Разсужденія о томъ, что такое пространство четырехъ измѣреній само по себѣ, какъ и относительно существъ, разумъ

которыхъ проявляется въ этихъ четырехъ измѣреніяхъ, -дѣло чисто умозрительное. Но ни въ какомъ случаѣ не дѣло математиковъ упорно отклонять представляющуюся имъ задачу, а, наоборотъ, они должны идти во главѣ и изучать съ возможной добросовѣстностью и съ необходимыми ограниченіями всѣ особенности четырехмѣрнаго пространства, если бы таковое существовало.

Основное, руководящее начало ихъ разсужденій состоитъ въ слѣдующемъ: если существуютъ взаимоотношенія геометріи 2-хъ измѣреній къ геометріи трехъ измѣреній, значитъ можно предполагать подобныя же (аналогичныя) отношенія между геометріей трехъ измѣреній и нѣкоторой геометріей четырехъ измѣреній. Какъ кругъ находится въ извѣстныхъ соотношеніяхъ къ шару, такъ и шаръ, быть можетъ, имѣетъ связь съ нѣкоторымъ извѣстнымъ тѣломъ, существующимъ въ пространствѣ 4-хъ измѣреній. Какъ относится квадратъ къ кубу, такъ можетъ относиться кубъ къ какой либо фигурѣ четвертаго измѣренія, которую мы можемъ назвать хотя «кубоидомъ» (или «сверхкубомъ»).

Безъ сомнѣнія, четвертое измѣреніе, такъ сказать, неосязаемо. Математики не просятъ насъ представлять себѣ четвертое измѣреніе, еще менѣе они просятъ вѣрить въ него. Нельзя предполагать, чтобы наиболѣе даже изучающій эту область могъ представить себѣ хотя умственно изображеніе четырехмѣрнаго пространства. Тѣмъ не менѣе особенности и отношенія фигуръ, предполагаемыхъ въ четырехмѣрномъ пространствѣ, могутъ быть изслѣдованы и установлены.

Алгебра есть наука о числахъ вообще. Она оказываетъ существенную помощь при изученіи геометріи. Алгебра широко оперируетъ съ такими уравненіями, какъ $xy = 12$, которое означаетъ, что x и y суть два такихъ перемѣнныхъ числа, которыя, будучи помножены другъ на друга, дадутъ 12; какъ, наприм.. 3 и 4 или 5 и $\frac{12}{5}$. Всѣ простѣйшія геометрическія фигуры, какъ прямая линія и кругъ, могутъ быть изображены уравненіями, другими словами, уравненія—это сокращенныя описанія соотвѣтствующихъ геометрическихъ фигуръ. Математики показываютъ, что особенности соотвѣтствующихъ геометрическихъ фигуръ могутъ быть изучаемы гораздо скорѣе посредствомъ

ихъ уравненій, чѣмъ посредствомъ прямого изученія самихъ фигуръ. Математикъ, понимающій этотъ способъ изученія, можетъ, смотря на уравненіе кривой, опредѣлить всѣ роды интересныхъ и полезныхъ особенностей ея, не только не видя самой кривой, но не имѣя даже представленія о ея изображеніи.

Не входя въ подробности, скажемъ, что одно уравненіе съ двумя перемѣнными представляетъ плоскую фигуру: такъ $x^2+y^2=15$ изображаетъ кругъ. Одно уравненіе съ тремя перемѣнными представляетъ фигуру въ пространствѣ; такъ уравненіе $x^2+y^2-z^2=0$ изображаетъ конусъ. Что же изображаетъ одно уравненіе съ четырьмя перемѣнными числами, скажемъ, напримѣръ, $x^2+y^2+z^2+w^2=20$? *По аналогіи* мы должны бы сказать, что оно изображаетъ фигуру въ пространствѣ четырехъ измѣреній. Хотя мы и не можемъ вообразить такой фигуры, мы можемъ, однако, продолжить аналогію и изучить эту несуществующую фигуру посредствомъ ея уравненія, и такимъ образомъ мы можемъ вывести многія изъ ея особенностей.

Разница въ данномъ случаѣ просто такова: изучая уравненіе конуса, мы всегда можемъ имѣть дѣло съ реальнымъ конусомъ и толковать наши результаты на немъ самомъ. Изучая же уравненіе четырехмѣрной фигуры, мы должны обойтись безъ такого реальнаго толкованія. Другими словами, хотя наша геометрія держится на трехъ измѣреніяхъ, наша алгебра можетъ имѣть дѣло со всякимъ числомъ измѣреній и можетъ побуждать насъ воображать геометрію съ большимъ количествомъ, чѣмъ три измѣренія.

Набросаемъ кратко путь, которымъ алгебра можетъ помочь составить хотя слабое представленіе о фигурѣ, имѣющей *четыре измѣренія*.

Фигуру, имѣющую три измѣренія, изучаютъ обыкновенно посредствомъ ея равноотстоящихъ другъ отъ друга параллельныхъ сѣченій. Напримѣръ, если натуралисту нужно изслѣдовать подъ микроскопомъ клѣточку зародыша, онъ разрѣзываетъ ее тщательно на тончайшія пластинки и укладываетъ ихъ послѣдовательно на гладкомъ стеклѣ. Разсматривая затѣмъ последовательно эти сѣченія, онъ можетъ представить себѣ все строеніе клѣточки зародыша.

Математики имѣютъ правила, по которымъ подобныя же сѣченія всякой трехмѣрной фигуры могутъ быть представлены посредствомъ уравненій. Они начинаютъ съ уравненія, которое представляетъ твердое тѣло, напримѣръ, съ уравненія $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, представляющаго шаръ. Затѣмъ они выполняютъ рядъ нѣкоторыхъ дѣйствій, въ результатѣ которыхъ получаютъ ряды уравненій, представляющихъ послѣдовательныя сѣченія этого трехмѣрнаго тѣла. Остается затѣмъ только начертить изображенія сѣченій, данныхъ этими уравненіями, и изъ совмѣстнаго разсмотрѣнія всѣхъ этихъ изображеній можно составить себѣ ясное представленіе о формѣ взятаго начальнаго тѣла. Въ случаѣ шара сѣченія будутъ круги разныхъ величинъ.

Какъ мы уже сказали раньше, уравненіе, имѣющее четыре перемѣнныхъ числа, можетъ по аналогіи представлять фигуру въ пространствѣ четырехъ измѣреній. Предположимъ, что имѣемъ такое уравненіе:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 20.$$

Мы можемъ примѣнить здѣсь тѣ же, упомянутыя выше, правила и выполнить тѣ же дѣйствія, чтобы получить сѣченія фигуры, представленной этимъ уравненіемъ. Любопытно, но вполнѣ логично, что эти сѣченія представляютъ собой трехмѣрныя фигуры. По даннымъ, доставленнымъ результатами уравненій, математики могутъ сдѣлать себѣ модели полученныхъ тѣлъ изъ глины и положить эти твердыя тѣла въ ряды на столѣ передъ собой. Какъ натуралистъ, разсматривая въ микроскопъ послѣдовательный рядъ плоскихъ сѣченій клѣтки, получаетъ представленіе о строеніи всей клѣтки зародыша, такъ и математикъ можетъ разсматривать ряды глиняныхъ моделей передъ нимъ и по возможности «чувствовать», что онъ имѣетъ хотя нѣкоторое понятіе о природѣ четырехмѣрной фигуры, представленной уравненіемъ, изъ котораго онъ исходилъ.

Такимъ образомъ, мы видимъ теперь, какъ четвертое измѣреніе можетъ быть изучаемо посредствомъ уравненій, доставляемыхъ алгеброй.

Есть другой болѣе смѣлый путь. Мы уже видѣли, что можно расположить въ пространствѣ три пера такъ, что каждое изъ

нихъ образуетъ прямой уголъ съ каждымъ изъ остальныхъ. Вмѣсто утвержденій, что безсмысленно, молъ, предполагать, что четвертое перо можетъ быть поставлено такъ, чтобы образовать прямые углы съ каждымъ изъ первыхъ трехъ, *предположимъ*, что это *можетъ быть сдѣлано*. Вслѣдъ затѣмъ уже безъ дальнѣйшихъ предположеній можетъ быть построена на чистомъ разсужденіи полная геометрія четырехъ измѣреній. Многія изъ заключеній такой геометріи будутъ не болѣе очевидны для смысла, чѣмъ основное предположеніе, изъ котораго она исходитъ. Слѣдуетъ помнить, однако, что это есть *только* допущеніе, и что все остальное можетъ быть выведено изъ этого единственнаго допущенія и изъ принциповъ нашей хорошо извѣстной планиметріи и геометріи тѣлъ.

Все сказанное выше о специіальномъ способѣ изученія пространства четырехъ измѣреній можетъ служить примѣромъ того, какъ математики разсуждаютъ о нѣкоторыхъ вещахъ, не имѣя возможности дѣйствительно вообразить ихъ. Мы начинаемъ съ установленія отношеній между двумя и тремя измѣреніями, а затѣмъ устанавливаемъ подобныя же отношенія уже *по аналогіи* между тремя измѣреніями и четырьмя измѣреніями. Предположимъ, что передъ нами стоитъ на столѣ стеклянный кубъ. Закроемъ одинъ глазъ и устремимъ другой прямо въ низъ куба. Онъ представится намъ приблизительно такъ, какъ на прилагаемомъ рисункѣ (фиг. 47). Рисунокъ этотъ въ дѣйствительности есть плоская фигура (двухъ измѣреній) и можетъ быть начерчена слѣдующимъ образомъ: вычерчивается одинъ квадратъ внутри другого и затѣмъ прово-

Фиг. 47. Трехмѣрная фигура въ плоскомъ изображеніи. Видъ стекляннаго куба, если смотрѣть на него однимъ глазомъ сверху.

дятся линіи, соединяющія соотвѣтствующіе углы. Все это можетъ быть сдѣлано безъ всякой мысли о трехъ измѣреніяхъ.

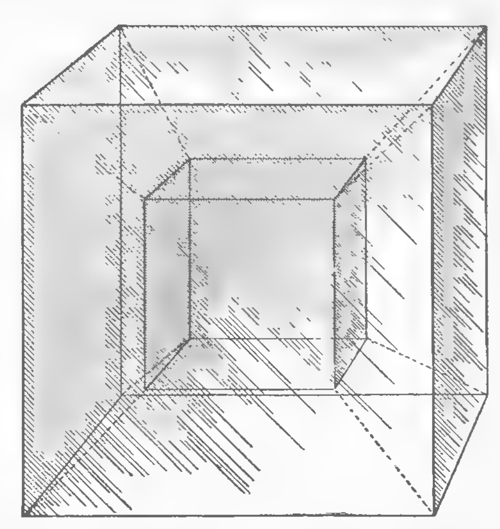
Пчелы въ стеклянномъ ульѣ могутъ начертить такую же фигуру (фиг. 47), какая здѣсь передъ нами на бумагѣ, и на основаніи этой фигуры могутъ быть изучены многія изъ особенностей куба. Считая четырехсторонція фигуры (*ABCD*, *EFGH*, *AEFB*, *BFGC*, *CGHD*, *DHEA*), которыхъ шесть, мы узнаемъ, сколько граней имѣетъ кубъ. Считая точки верхнихъ угловъ, которыхъ восемь, мы узнаемъ, сколько имѣетъ кубъ вершинъ. Считая линіи, которыхъ двѣнадцать, узнаемъ, сколько въ кубѣ реберъ.

Итакъ, исходя изъ квадрата, мы въ состояніи построить двухмѣрную фигуру, которую въ цѣляхъ изслѣдованія можемъ разсматривать, какъ представляющую кубъ. Не можемъ ли мы точно также, исходя отъ куба, построить такую трехмѣрную фигуру, которая могла бы служить изображеніемъ той четырехмѣрной фигуры, которую мы зовемъ кубоидомъ, или сверхкубомъ? И вотъ, точно такъ же, какъ мы рисовали меньшій квадратъ внутри бо̀льшаго, такъ можемъ думать о меньшемъ кубѣ внутри бо̀льшаго куба, и какъ чертили линіи, соединяющія соотвѣтствующіе углы квадратовъ, такъ можемъ провести плоскости, соединяющія соотвѣтственныя ребра (края) кубовъ. Фигура, такъ образованная, нѣсколько несовершенно изображена здѣсь фигурой 48-й, и для ясности предположимъ, что у насъ есть дѣйствительно такое твердое стеклянное тѣло.

Въ случаѣ квадратовъ, выше, чтобы найти, сколько квадратныхъ граней имѣетъ кубъ, мы считали большой наружный квадратъ, маленькій—внутренній, четыре его окружающія четыреугольныя фигуры, и получили такимъ образомъ въ результатѣ шесть. Точно такъ же въ случаѣ кубовъ, чтобы найти здѣсь число кубическихъ граней въ кубоидѣ (сверхкубѣ), считаемъ большой наружный кубъ, маленькій внутренній кубъ и шесть окружающихъ его твердыхъ тѣлъ и такимъ образомъ получаемъ въ результатѣ *восемь*. Это показываетъ, что кубоидъ, или сверхкубъ, имѣетъ восемь ограничивающихъ его кубическихъ граней. Дальнѣйшее изученіе представленной здѣсь фигуры обнаруживаетъ, что кубоидъ имѣетъ 24 плоскихъ квадратныхъ грани,

32 ребра и 16 вершинъ. Такъ можемъ мы получить родъ изображенія четырехмѣрнаго тѣла и по этому изображенію изучать его нѣкоторыя особенности. Есть много соображеній, подтверждающихъ точность вышеизложенныхъ выводовъ, для которыхъ у насъ нѣтъ мѣста.

Какая же польза отъ этихъ обобщеній, отвлеченій и разсужденій? Приблизительно та же, что и отъ знанія того, вертится ли Земля вокругъ Солнца, или, наоборотъ, Солнце вокругъ Земли. Пространство собственно такой же предметъ науки, какъ планеты или геологическія наслоенія. Кромѣ того, изученіе подобныхъ основныхъ вопросовъ геометріи бросаетъ свѣтъ на нашъ собственный природный мыслительный запасъ. Мы узнаемъ такимъ путемъ лучше природу мыслительнаго процесса, и какъ развивается наука изъ простыхъ основныхъ элементовъ. Такія размышленія ведутъ иногда къ очень полезнымъ результатамъ.



Фиг. 48. Аналогичное изображеніе «кубоида» (или сверхкуба) 4-хъ измѣреній посредствомъ фигуры 3-хъ измѣреній.

Если вы держите пять шариковъ въ рукѣ и говорите, что отняли изъ нихъ восемь, то подобное увѣреніе покажется немыслимымъ такъ же, какъ понятіе о четвертомъ измѣреніи. Но, когда люди стали изображать черезъ —3 (отрицательное число) результатъ вычитанія 8 изъ 5 вмѣсто того, чтобы говорить, что это невозможно, то было положено основаніе огромнѣйшей и плодотворной науки — алгебры.

Допущеніе четвертаго измѣренія не привело еще ни къ какимъ существеннымъ практическимъ результатамъ. Но во всякомъ случаѣ нельзя утверждать, что наука о четырехмѣрной геометріи не можетъ имѣть полезныхъ примѣненій.

Проф. Карлъ Пирсонъ какъ-то сказалъ, что, быть можетъ, атомъ и есть мѣсто, откуда эѳиръ проникаетъ въ наше пространство изъ пространства 4-хъ измѣреній. Можно показать математически, что подобное допущеніе объясняло бы многія явленія матеріи. При настоящемъ состояніи нашихъ знаній такое предположеніе кажется фантастичнымъ даже самому высказавшему его. Впрочемъ, оно гораздо менѣе фантастично, чѣмъ предположенія германскихъ спиритовъ, смотрящихъ на 4-е измѣреніе, какъ на мѣстопребываніе какихъ-то безплотныхъ духовъ.

Четвертое измѣреніе въ доступномъ изложеніи.

(*Graham Demby Fitch*).

Нарисовать, хотя бы умственно, картину пространства четырехъ измѣреній—невозможно. Между тѣмъ четвертое измѣреніе не есть нелѣпость, а полезное математическое понятіе, не стоящее въ противорѣчіи съ правильнымъ развитіемъ геометріи. Чтобы выяснить его особое и символическое значеніе, необходимо прибѣгнуть къ сопоставленіямъ съ измѣреніями низшаго порядка.

О какой либо данной совокупности говорятъ, что она одного, двухъ или трехъ измѣреній, смотря по тому,—одно, два или три числа необходимы для опредѣленія какого либо изъ ея элементовъ.

Если разсматривать пространство, какъ совокупность точекъ, то линія есть пространство одного измѣренія, такъ какъ, чтобы опредѣлить на ней положеніе какой либо точки, достаточно одного числа, дающаго разстояніе этой точки отъ другой напередъ назначенной точки. Подобнымъ же образомъ, плоскость есть двухмѣрное пространство; а окружающее насъ «обыкновенное» пространство трехмѣрно.

Въ самомъ дѣлѣ, точное положеніе какого нибудь пункта на землѣ дѣлается извѣстнымъ, когда даны его географическая широта, долгота и высота надъ уровнемъ моря.

Значитъ, если мы имѣемъ нѣкоторыя четыре перемѣнныхъ количества и связанныя такъ, что каждое способно независимо отъ другихъ принимать всякую возможную числовую величину, то мы получаемъ нѣкоторую *четырехмѣрную* совокупность. Если такую совокупность принять состоящей изъ точекъ, то она и составляетъ какое-то четырехмѣрное пространство (сверхпространство), или пространство четырехъ измѣреній, какъ говорятъ.

Если мы соединимъ всѣ точки нашего обыкновеннаго трехмѣрнаго пространства съ какой-то подразумѣваемой точкой гдѣ-то внѣ его, то совокупность всѣхъ точекъ, соединяющихъ линіи и составитъ четырехмѣрное пространство (сверхпространство).

Съ другой стороны, какъ движеніе точки образуетъ линію, движеніе (не по собственному слѣду, а въ новомъ измѣреніи) линіи образуетъ плоскость, а движущаяся въ новомъ измѣреніи плоскость образуетъ трехмѣрное тѣло, такъ и это тѣло, движеніемъ еще въ новомъ направленіи уже внѣ нашего пространства, образовало бы сверхтѣло или часть сверхпространства. Иначе говоря, сверхпространство (пространство четырехъ измѣреній) можетъ произойти, какъ слѣдствіе движенія всего нашего пространства пераллельно самому себѣ по какому-то направленію *внѣ себя*, совершенно такъ же, какъ наше пространство можетъ быть образовано движеніемъ неограниченной плоскости, которая въ свою очередь сама образуется неограниченной прямой линіей.

Всякое пространство есть то, что образуетъ границу (сѣченіе) между двумя частями другого высшаго пространства. Какъ каждая неограниченная плоскость раздѣляетъ наше пространство на двѣ равныхъ безконечныхъ части, точно такъ каждое трехмѣрное пространство должно раздѣлять сверхпространство на двѣ равныя безконечныя области, между которыми это трехмѣрное пространство образуетъ границу безконечно малой толщины въ четвертомъ измѣреніи.

Въ сверхпространствѣ мы должны имѣть слѣдующія возможныя пересѣченія: сверхтѣло и трехмѣрное пространство въ пересѣченіи даютъ тѣло; два трехмѣрныхъ пространства пересѣкаются по плоскости; три трехмѣрныхъ пространства пересѣкаются по прямой линіи, четыре трехмѣрныхъ пространства пересѣкаются

въ одной точкѣ, трехмѣрное пространство и плоскость пересѣкаются по прямой линіи; трехмѣрное пространство въ пересѣченіи съ прямой линіей даетъ точку; двѣ плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если пересѣченія имѣютъ мѣсто на безконечномъ разстояніи, то пересѣкающіеся элементы, какъ говорятъ, параллельны; и если два трехмѣрныхъ пространства параллельны, всѣ фигуры, или тѣла въ одномъ трехмѣрномъ пространствѣ находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ другого трехмѣрнаго пространства. Что касается плоскостей, то въ сверхпространствѣ существуетъ два рода параллелизма. Параллельныя плоскости вполнѣ или не вполнѣ параллельны, смотря по тому, находятся ли онѣ въ одномъ и томъ же или различныхъ трехмѣрныхъ пространствахъ, или же представляется ли пересѣченіе ихъ въ безконечности прямой линіей или точкой.

Въ одной и той же плоскости къ данной прямой линіи изъ данной на ней точки можно возставить только одинъ перпендикуляръ; между тѣмъ въ трехмѣрномъ пространствѣ можно провести безконечное число перпендикуляровъ, образующихъ вмѣстѣ одну перпендикулярную плоскость къ данной прямой. Значитъ, въ сверхпространствѣ можно провести безконечное количество перпендикулярныхъ плоскостей, образующихъ вмѣстѣ трехмѣрное пространство, перпендикулярное къ данной прямой линіи. Трехмѣрное пространство можетъ быть здѣсь, слѣдовательно, перпендикулярно къ плоскости или другому трехмѣрному пространству. Плоскости могутъ быть перпендикулярны двояко, вполнѣ или не вполнѣ перпендикулярны, согласно тому, находятся ли онѣ въ одномъ и томъ же трехмѣрномъ пространствѣ или нѣтъ. Въ послѣднемъ случаѣ всякая прямая линія одного трехмѣрнаго пространства перпендикулярна ко всякой прямой линіи другого.

Положеніе точки на плоскости можетъ быть опредѣлено ея разстояніемъ отъ каждой изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ линій [1]). Въ нашемъ трехмѣрномъ простран-

[1]) Эти прямыя носятъ названіе *координатъ*. Для выясненія понятія о координатахъ см. «Въ царствѣ смекалки», книга вторая: глава «Графики» (стр. 117—127), а также стр. 151, 155, 156 и др.

ствѣ положеніе точки можетъ быть опредѣлено ея разстояніемъ отъ каждой изъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей (координатныя плоскости), а въ сверхпространствѣ это положеніе опредѣлится ея разстояніями отъ каждаго изъ четырехъ взаимно перпендикулярныхъ трехмѣрныхъ пространствъ. Въ сверхпространствѣ эти разстоянія измѣряются соотвѣтственно *по четыремъ взаимно-перпендикулярнымъ* прямымъ, которыя, взятыя по двѣ, опредѣляютъ шесть взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, а взятыя по три,—опредѣляютъ вышеупомянутыя четыре взаимно-перпендикулярныя трехмѣрныя пространства.

Какъ въ нашемъ пространствѣ требуются по меньшей мѣрѣ три точки, чтобы опредѣлить плоскость, такъ въ сверхпространствѣ требуются по меньшей мѣрѣ четыре точки, чтобы опредѣлить трехмѣрное пространство. Трехмѣрное пространство, такимъ образомъ, можетъ быть опредѣлено двумя непересѣкающимися прямыми линіями, или одной плоскостью и точкой внѣ ея.

Какъ части нашего пространства ограничены поверхностями, плоскими или кривыми, такъ части сверхпространства ограничиваются сверхповерхностями (трехмѣрными), т. е. плоскими или изогнутыми трехмѣрными пространствами.

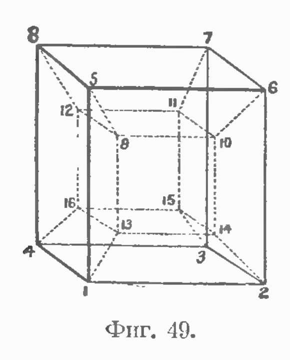
Сверхпространство содержитъ не только безконечное число плоскихъ трехмѣрныхъ пространствъ, подобныхъ нашему, но также безконечное число кривыхъ трехмѣрныхъ пространствъ или сверхповерхностей различнаго типа. Сверхсфера или сверхшаръ, напримѣръ, есть замкнутая сверхповерхность, всѣ точки которой находятся на равномъ разстояніи отъ ихъ центра. Пять точекъ, не лежащихъ въ одномъ и томъ же трехмѣрномъ пространствѣ, опредѣляютъ сверхсферу такъ же, какъ четыре точки, не лежащія на одной и той же плоскости, опредѣляютъ сферу, а три точки, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ окружность. Всѣ ея (сверхсферы) плоскія сѣченія—круги, и всѣ ея пространственныя сѣченія суть сферы.

Сверхсфера радіуса R, проходящая черезъ наше пространство, казалась бы сферой съ радіусомъ, постепенно увеличивающимся отъ нуля до R и затѣмъ постепенно уменьшающимся отъ R до нуля.

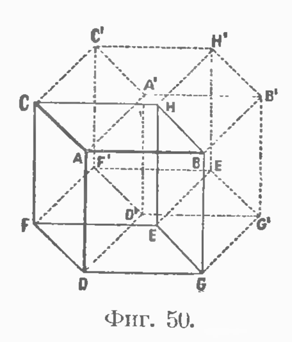
Въ то время какъ въ нашемъ пространствѣ только пять правильныхъ многогранниковъ (тѣла, ограниченныя равными правильными многоугольниками), и именно четырехгранникъ (тетраэдръ), шестигранникъ (кубъ), осьмигранникъ (октаэдръ), двѣнадцатигранникъ (додекаэдръ) и двадцатигранникъ (икосаэдръ), въ сверхпространствѣ *шесть* правильныхъ сверхтѣлъ, ограниченныхъ равными правильными многогранниками. Это C^5 (ограниченъ пятью четырехгранниками), C^8 (восемью кубами), C^{16} (шестнадцатью четырехгранниками), C^{24} (24 восьмигранниками), C^{120} (120 двѣнадцатигранниками), C^{600} (600 четырехгранниками).

Всѣ эти тѣла основательно изучены математиками, и модели ихъ изображеній въ нашемъ пространствѣ были построены. Изъ нихъ C^9 (или сверхкубъ) простѣйшій, потому что, хотя онъ ограниченъ и большимъ числомъ многоугольниковъ, чѣмъ C^5, за то онъ прямоугольный со всѣхъ сторонъ и, слѣдовательно, можетъ служить готовой мѣрой для измѣренія сверхпространства. Сверхкубъ получается движеніемъ куба по какому-то направленію, перпендикулярному къ нашему пространству, на разстояніе, равное одной изъ его сторонъ.

На фиг. 50-й, гдѣ всѣ линіи, обозначенныя точками, предполагаются находящимся въ сверхпространствѣ, первоначальный



Фиг. 49.



Фиг. 50.

кубъ обозначенъ буквами $A\ B\ G\ D\ E\ F\ C\ H$, а конечный кубъ буквами $A'B'G'D'E'F'C'H'$, направленіе AA' предполагается перпендикулярнымъ къ нашему пространству. Проэктируя ребра сверхкуба на наше пространство, мы получаемъ сѣтчатую модель, плоская проэкція которой изображена на фиг. 49-ой. Восемь

ограничивающихъ кубовъ изображены на модели слѣдующими знаками: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), (5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), (13, 14, 15, 16, 1, 2, 3, 4), (1, 5, 9, 13, 2, 6, 10, 14), (2, 6, 10, 14, 3, 7, 11, 15), (3, 7, 11, 15, 4, 8, 12, 16), (4, 8, 12, 16, 5, 9, 13, 1).

Форма сверхкуба находится въ зависимости отъ взаимнаго отношенія этихъ кубовъ. Они только ограничиваютъ его. Самъ же сверхкубъ содержитъ безконечное количество кубовъ, подобно тому какъ кубъ содержитъ безконечное количество квадратовъ.

При образованіи сверхкуба движеніемъ куба, вершины послѣдняго образуютъ ребра сверхкуба, ребра куба производятъ квадратныя грани сверхкуба, а грани куба образуютъ кубы. Число элементовъ сверхкуба, слѣдовательно, таково (для ясности даемъ табличку его образованія):

	Начальный кубъ.	Образуется движеніемъ.	Конечный кубъ.	Сверхкубъ.
Вершины	8	—	8	16
Ребра	12	8	12	32
Грани (квадраты) . .	6	12	6	24
Кубы	1	6	1	8

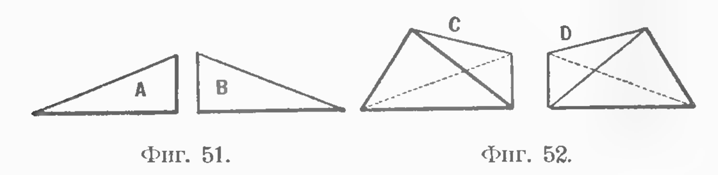
Каждая вершина сверхкуба есть общая четыремъ взаимно-перпендикулярнымъ ребрамъ, шести гранямъ и четыремъ кубамъ; каждое ребро принадлежитъ тремъ гранямъ и тремъ кубамъ, и каждая грань принадлежитъ двумъ кубамъ. Всякій кубъ, слѣдовательно, имѣетъ одну грань, общую съ 6 изъ 7 другихъ.

Мы должны, слѣдовательно, воображать сверхкубъ, какъ составленный изъ кубовъ, начинающихся отъ параллельныхъ граней куба, и изъ этихъ кубовъ всѣ существующіе въ нашемъ пространствѣ параллельны квадратамъ, изъ которыхъ они начинаются.

Единственный возможный родъ вращенія въ плоскости, это— вращеніе вокругъ точки; въ трехмѣрномъ пространствѣ вращеніе можетъ совершаться вокругъ осевой линіи, а въ сверхпространствѣ и вокругъ осевой плоскости.

Двѣ симметрическія плоскія фигуры, какъ треугольники A и B (фиг. 51), не могутъ быть приведены къ совпаденію при

какомъ угодно движеніи въ одной ихъ собственной плоскости; но при поворотѣ на 180 градусовъ одной изъ нихъ въ третьемъ измѣреніи одна совпадетъ съ другой. Подобнымъ образомъ два симметрическихъ тѣла (съ гранями равными, но въ обратномъ порядкѣ), такихъ, какъ, напр., пирамиды *C* и *D* (фиг. 52), не



Фиг. 51. Фиг. 52.

могутъ совпадать при движеніи въ нашемъ пространствѣ, но при поворотѣ одной изъ нихъ на 180 градусовъ въ сверхпространствѣ обѣ пирамиды совпадутъ.

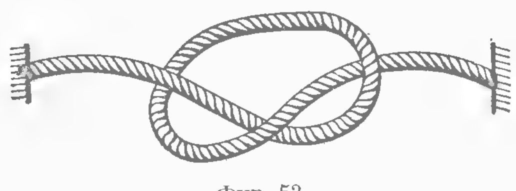
Вращающаяся пирамида при этомъ должна исчезнуть изъ нашего пространства и по ея возвращеніи, послѣ вращенія на 180 градусовъ, она уже можетъ совпасть съ другой. Въ нашемъ пространствѣ два движенія вращенія слагаются въ одно окончательное вращеніе, подобное составляющимъ его вращеніямъ, исключая случай, когда направленіе оси различно. Въ сверхпространствѣ наоборотъ: здѣсь вообще нѣтъ движенія слагающагося изъ двухъ вращеній. Отсюда два различные типа движенія въ сверхпространствѣ, и тѣло, подчиненное двумъ вращеніямъ, находится тамъ въ совершенно различномъ условіи отъ того, когда оно подчинено только одному. При подчиненіи одному вращенію вся плоскость тѣла неподвижна. При подчиненіи двойному вращенію ни одна часть тѣла не остается неподвижной, исключая точки, содержащей двѣ плоскости движенія. Если же оба вращенія равны, всякая точка въ тѣлѣ, за исключеніемъ одной, описываетъ кругъ.

Свободъ движенія въ сверхпространствѣ болѣе, чѣмъ въ нашемъ. Степеней свободы твердаго тѣла въ пространствѣ 6, а именно: 3 перемѣщенія вдоль и 3 вращенія около 3 осей. Въ то же время прикрѣпленіе трехъ изъ точекъ тѣла можетъ предупредить всякое его движеніе. Въ сверхпространствѣ, однако, тѣло съ закрѣпленными тремя точками можетъ все еще вращаться около плоскости, проходящей черезъ эти точки. Въ сверхпро-

странствѣ твердое тѣло имѣетъ десять возможныхъ различныхъ движеній (10 степеней свободы), а именно: 4 перемѣщенія вдоль 4 осей и 6 вращеній около шести плоскостей; и по меньшей мѣрѣ четыре изъ его точекъ должны быть закрѣплены, чтобы предупредить всякое движеніе.

Матеріальная точка въ нашемъ пространствѣ будетъ неподвижной, если связать ее съ тремя неподвижными точками внѣ ея. Въ сверхпространствѣ такая точка должна быть твердо связана по крайней мѣрѣ съ шестью точками внѣ.

Въ сверхпространствѣ упругая сфера можетъ быть безъ вытягиванья или разрыва вывернута на другую сторону. Два кольца цѣпи могутъ быть раздѣлены безъ разрыва. Наши узлы тамъ безполезны. Такъ, узелъ, показанный на фиг. 53, можетъ



Фиг. 53.

быть развязанъ безъ передвиженія скрѣпленныхъ концовъ. Какъ въ нашемъ пространствѣ точка можетъ войти въ кругъ и выйти изъ него (черезъ 3-е измѣреніе), не прикасаясь къ окружности, такъ въ сверхпространствѣ тѣло можетъ пройти въ сферу и изъ нея (или другое замкнутое пространство), не проходя черезъ поверхность, окружающую ее. Словомъ, все ограниченное и закрытое въ нашемъ пространствѣ, всякая внутренность плотнаго тѣла открыты для наблюденія или дѣйствія изъ четвертаго измѣренія, которое распространяется по совершенно невѣдомому намъ направленію отъ всякой точки пространства.

Имѣетъ ли сверхпространство реальное, физическое существованіе? Если да, то наша вселенная должна имѣть чрезвычайно малую толщину въ четвертомъ измѣреніи, иначе говоря, она подобна въ немъ геометрической плоскости, которую мы принимаемъ совсѣмъ не имѣющей толщины. Нашъ міръ въ такомъ случаѣ представляется только абстракціей (какъ и думали нѣкото-

рые идеалисты-философы), т. е. ничѣмъ инымъ, какъ «только тѣнью, бросаемой болѣе реальнымъ четырехмѣрнымъ міромъ».

Реальное существованіе тончайшаго протяженія въ четвертомъ измѣреніи можетъ упростить нѣкоторыя научныя теоріи. Напримѣръ, въ нашемъ пространствѣ 4 есть наибольшее число точекъ, взаимныя разстоянія которыхъ (числомъ 6) всѣ независимы другъ отъ друга. Но въ сверхпространствѣ 10 разстояній между каждыми 2 изъ 5 точекъ геометрически независимы. Если эту большую свободу положенія признать допустимой для атомовъ, то это помогло бы объяснить такое химическое явленіе, какъ изомеризмъ, гдѣ молекулы одинаковаго состава имѣютъ различныя свойства. Съ другой стороны, вращеніе въ сверхпространствѣ могло бы объяснить перемѣну въ тѣлѣ, происходящую справа въ то время, какъ слѣва происходитъ поляризація свѣта. Далѣе, проф. Макэндрикъ въ засѣданіи Британскаго научнаго общества сказалъ: «Можно думать, что жизнь есть не что иное, какъ переходъ къ мертвой матеріи... въ формѣ движенія своего рода (*sui generis*)».

Мысль о сверхпространствѣ была нѣсколько опошлена спиритуалистами, которые населили его измышленіями собственной фантазіи. Тѣмъ не менѣе, возможность его существованія никогда еще не была несовмѣстима съ научными фактами. Слѣдовательно, ограниченіе пространства тремя измѣреніями, хотя, быть можетъ, и правильное, есть чисто опытное (эмпирическое).

Къ чему же нужно понятіе сверхпространства? Хотя бы для одного: оно даетъ болѣе глубокій взглядъ на геометрію. Такъ, кругъ, разсматриваемый только въ одномъ измѣреніи, какъ совокупность ряда точекъ, имѣетъ очень мало особенностей. Между тѣмъ, разсматриваемый въ плоскости,—онъ уже имѣетъ центръ, радіусъ, касательныя и т. д., а въ трехмѣрномъ пространствѣ онъ имѣетъ еще дальнѣйшія числовыя и геометрическія соотношенія съ сферой, конусомъ и т. д.

Подобнымъ же образомъ свойства какой нибудь данной линіи, или поверхности, увеличиваются въ числѣ, когда изслѣдуются въ сверхпространствѣ.

Итакъ, стоитъ только намъ включить въ трехмѣрное пространство какія нибудь одномѣрныя совокупности (спираль, на-

примѣръ), какъ до сихъ поръ неизвѣстныя линіи и поверхности дѣлаются математически возможными и въ сверхпространствѣ. Низшія пространства содержатся въ высшихъ, и какъ наши понятія о геометріи плоскости расширяются разсмотрѣніемъ плоскихъ фигуръ въ трехмѣрномъ пространствѣ, такъ и геометрія тѣлъ еще болѣе освѣщается геометріей сверхпространства. Математическія области, до сихъ поръ недоступныя геометріи, освѣщаются теперь геометрическими представленіями. Наконецъ, понятіе о сверхпространствѣ вноситъ полное различіе между геометрическимъ пространствомъ и дѣйствительнымъ (реальнымъ) окружающимъ насъ пространствомъ. Оба эти пространства не считаются болѣе необходимо одинаковыми, и такимъ образомъ опять-таки расширяются наши умственные горизонты.

И. Кантъ о пространствѣ.

При помощи внѣшняго чувства (свойства нашей души) мы представляемъ себѣ предметы, какъ находящіеся внѣ насъ и притомъ всегда въ пространствѣ. Въ немъ опредѣляются, или могутъ быть опредѣляемы ихъ форма, величина и взаимныя отношенія. Внутреннее чувство, посредствомъ котораго наша душа созерцаетъ самое себя или свое внутреннее состояніе, не даетъ, правда, представленія о самой душѣ, какъ объектѣ, однако существуетъ опредѣленная форма, въ которой только и возможно созерцаніе внутренняго состоянія души, а именно, все, что сюда относится, представляется въ отношеніяхъ времени. Внѣ насъ мы не можемъ созерцать времени, равно какъ не можемъ представить себѣ пространство находящимся внутри насъ. Что же такое пространство и время? Представляютъ ли они собою дѣйствительныя сущности? Быть можетъ, это лишь опредѣленія или отношенія вещей, но такія, которыя присущи вещамъ въ себѣ, т. е. если бы мы даже не созерцали ихъ? Или же они присущи только формѣ нашего созерцанія и, слѣдовательно, зависятъ отъ субъективнаго свойства нашей души, безъ котораго они отнюдь не прилагались бы къ предметамъ? Чтобы уяснить себѣ это, разсмотримъ сначала пространство.

1. Пространство не есть эмпирическое понятіе, отвлеченное изъ внѣшняго опыта. Для того, чтобы (въ опытѣ) извѣстныя ощущенія относить къ чему-нибудь, внѣ меня находящемуся (т. е. къ чему-нибудь, находящемуся въ другомъ пунктѣ пространства, а не въ томъ, гдѣ я нахожусь),—равнымъ образомъ, чтобы представлять ихъ одно внѣ другого или одно рядомъ съ

другимъ, т. е. не только различными, но и находящимися въ различныхъ мѣстахъ,—для этого я уже долженъ имѣть представленіе о пространствѣ. Поэтому не представленіе пространства заимствуется путемъ опыта изъ отношеній внѣшнихъ явленій, а наоборотъ, самый опытъ возможенъ лишь при существованіи представленія пространства.

2. Пространство есть необходимое представленіе a priori и лежитъ въ основѣ всякаго внѣшняго созерцанія. Нельзя представить отсутствія пространства, хотя очень легко себѣ вообразить, что пространство не наполнено никакими предметами. Стало быть, въ пространствѣ должно видѣть условіе возможности явленій, а не зависящее отъ нихъ отношеніе; оно есть представленіе a priori, которое составляетъ необходимую основу внѣшнихъ явленій.

3. Пространство не есть отвлеченное или, какъ говорятъ, общее понятіе объ отношеніяхъ вещей, а чистое созерцаніе. Это видно, прежде всего, изъ того, что мы можемъ себѣ представить лишь одно пространство, и когда мы говоримъ о немъ во множественномъ числѣ, то разумѣемъ части одного и того же единаго пространства. Эти части не могутъ предшествовать этому единому, всеобъемлющему пространству, какъ его составныя части, изъ которыхъ его можно было бы сложить, но мыслятся только въ немъ. Оно вполнѣ едино, и разнообразіе въ немъ, равно какъ и общее понятіе о пространствахъ вообще основываются исключительно на ограниченіяхъ. Отсюда слѣдуетъ, что въ основѣ всѣхъ понятій о немъ лежитъ созерцаніе a priori (не извлекаемое изъ опыта). Такъ и всѣ геометрическія положенія, напр., что сумма двухъ сторонъ въ треугольникѣ, больше третьей, никогда не могутъ быть выведены изъ общихъ понятій о линіи и треугольникѣ, а выводятся изъ созерцанія, и притомъ a priori, съ аподиктической достовѣрностью.

4. Пространство наглядно представляется, какъ безконечная данная величина. Общее, отвлеченное понятіе о пространствѣ (одинаковое какъ для фута, такъ и для локтя) не можетъ ничего опредѣлить въ смыслѣ величины пространства. Если бы въ самомъ процессѣ созерцанія пространства не создавалась безграничность, то никакое понятіе объ отношеніяхъ въ немъ не привело бы за собою принципа его безконечности.

И. Кантъ о времени.

1. Время не есть понятіе эмпирическое, отвлеченное изъ какого-либо опыта. Сосуществованіе или послѣдовательность сами по себѣ не могли бы быть предметомъ восприятія, если бы уже a priori не существовало представленіе времени. Только при этомъ условіи можно мыслить, что нѣчто

существуетъ въ одно и то же время (вмѣстѣ) или въ различное время (послѣдовательно).

2. Время есть необходимое представленіе, лежащее въ основѣ всякаго созерцанія. Изъ явленій время вообще невозможно устранить, хотя мыслимо время безъ явленій. Время, слѣдовательно, дано a priori. Только въ немъ возможна вся дѣйствительность явленій. Послѣднія могутъ совершенно отпасть, но оно само (какъ общее условіе ихъ возможности) не можетъ быть уничтожено.

3. На этой необходимости a priori покоится возможность аподиктическихъ положеній объ отношеніяхъ времени, или аксіомъ о времени вообще. Время имѣетъ лишь одно измѣреніе: различныя времена не могутъ существовать одновременно, а лишь одно послѣ другого (между тѣмъ какъ различныя пространства не могутъ существовать одно послѣ другого, а всегда одновременно). Эти принципы не могутъ быть выведены изъ опыта, такъ какъ послѣдній не далъ бы имъ ни строгой всеобщности, ни аподиктической достовѣрности. Мы могли бы тогда только сказать: такъ свидѣтельствуетъ обычное воспріятіе,—но не могли бы говорить: иначе не можетъ быть. Эти принципы имѣютъ значеніе правилъ, въ которыхъ только и возможенъ опытъ; они поучаютъ насъ до опыта, а не посредствомъ него.

4. Время не есть отвлеченное или, какъ выражаются, общее понятіе, а лишь чистая форма чувственнаго созерцанія. Различныя времена суть лишь части одного и того же времени. Но представленіе, которое можетъ быть сообщено только однимъ единственнымъ предметомъ, и есть созерцаніе. Положеніе, что различныя времена не могуть существовать одновременно, также не можетъ быть выведено изъ общаго понятія. Какъ положеніе синтетическое, оно не можетъ возникнуть изъ однихъ только понятій. Слѣдовательно, оно непосредственно заключается въ созерцаніи и представленіи времени.

5. Безконечность времени обозначаетъ, что всѣ опредѣленныя величины времени возможвы лишь благодаря ограниченіямъ единаго основного времени. Слѣдовательно, первоначальное представленіе времени должно быть неограниченнымъ. Но если отдѣльныя части и всякая опредѣленная величина предмета могутъ быть представлены лишь благодаря ограниченіямъ, то цѣлое представленіе не можетъ быть дано черезъ понятія (такъ какъ въ понятіи частичныя представленія предшествуютъ), а должно имѣть въ своей основѣ непосредственное созерцаніе.

Замѣчанія.

Кантъ въ другомъ мѣстѣ «Критики чистаго разума» говоритъ, что «вещи, которыя мы созерцаемъ, равно какъ и ихъ отношенія, сами по себѣ не таковы, какъ они намъ представляются, и если бы устранили нашъ субъектъ или хотя бы только субъективныя свойства нашихъ чувствъ, то всѣ свойства и всѣ отношенія объектовъ въ пространствѣ и времени, а также само пространство и время исчезли бы, ибо, какъ явленія, они могутъ существовать не сами въ себѣ, а только въ насъ. Какъ обстоитъ съ предметами, взятыми сами въ себѣ, независимо отъ этой воспріимчивости нашихъ чувствъ, намъ остается совершенно неизвѣстнымъ».

На субъективность познаваемыхъ чувствами качествъ указывали различные философы до Канта (напр. Декартъ и Локкъ) и для Канта эта субъективность была, разумѣется, такъ же несомнѣнна, какъ и для нихъ. Онъ заходитъ дальше Локка въ томъ отношеніи, что время и пространство считаетъ тоже субъективными—какъ формы созерцанія,—но онъ тщательно отличаетъ идеальность времени и пространства отъ субъективности чувственныхъ качествъ. Тогда какъ различія въ цвѣтовыхъ впечатлѣніяхъ, вкусовыхъ ощущеніяхъ (у отдѣльнаго лица) и т. д. являются чисто индивидуальными и, слѣдовательно, вызываютъ сомнѣніе въ дѣйствительности, время и пространство Кантъ выдѣляетъ изъ *всѣхъ* формъ созерцанія, какъ нѣчто *всеобщее и постоянное*, почему Локкъ и отнесъ ихъ къ числу первичныхъ качествъ.

Міръ есть лишь явленіе, не только вслѣдствіе субъективности чувственныхъ качествъ, которыя индивидуальны и случайны, но и потому, что мы познаемъ его посредствомъ формъ созерцанія—времени и пространства,—которыя служатъ *необходимыми и всеобщими* условіями явленій. Противъ Кантовскаго доказательства идеальности времени и пространства выдвигаются нѣкоторыя вѣскія возраженія, которыя, въ главномъ, сводятся къ возстановленію правъ опыта и къ доказательству его участія въ происхожденіи понятій пространства и времени.

Въ дополненіе къ вышеприведеннымъ отрывкамъ изъ Канта и замѣчаніямъ къ нимъ приведемъ еще слѣдующія страницы изъ замѣчательной книги проф. Н. Н. Шиллера *Значеніе понятій о «силѣ» и о «массѣ»*.

§ 2. *Формы познанія сущаго.* Огромнымъ шагомъ впередъ, который можно сравнить съ прыжкомъ черезъ пропасть, и значеніе котораго, можетъ быть, даже до сихъ поръ не вполнѣ оцѣнено, было дойти до сознанія, что самыя первоначальныя наши представленія, вплетающіяся въ каждый эле-

ментъ нашего мышленія, каковы суть представленія о времени и пространствѣ не могутъ быть признаны точными копіями, воспроизводящими нѣчто объективно существующее, не могутъ быть также принимаемы за свойства объектовъ, а суть только формы, въ коихъ мы умѣемъ представлять себѣ существующее, и кои вполнѣ обусловлены свойствами нашихъ мыслительныхъ способностей. Если мы на время отвлечемся отъ мыслящаго человѣка, то внѣшній міръ все-таки останется, но не останется ни времени, ни пространства. Если на мѣсто человѣка поставимъ другое мыслящее существо, но съ другими мыслительными способностями, то для ума такого существа тотъ же самый несомнѣнно существующій міръ можетъ представиться въ какихъ-либо иныхъ формахъ, совершенно независящихъ отъ представленій времени и пространства.


Проф. Николай Николаевичъ Шиллеръ. Извѣстный русскій физикъ-философъ (1848—1910).

Это отрицательное по формѣ положеніе о несущественности элементарныхъ представленій тѣмъ не менѣе положительнымъ образомъ расширяетъ несказанно наше міровоззрѣніе. Вселенная не является уже намъ безконечною только по своему протяженію или вѣчною во времени. Пространство и время, съ помощію коихъ мы представляемъ себѣ вселенную и ея процессы и кои по величинѣ мыслятся нами необъятными, являются намъ только двумя формами представленія среди возможнаго безчисленнаго множества другихъ формъ, въ которыхъ способна быть познаваема та же вселенная для болѣе усовершенствованнаго разумнаго существа. Доразвиться же до любой степени умственнаго совершенства не лежитъ внѣ предѣловъ возможности и для человѣка. Такимъ образомъ вселенная становится для насъ необъятною не только по отношенію къ пространству и времени, но вообще по отношенію къ возможному безконечно большому числу формъ ея познаванія. Для человѣка, лишеннаго зрѣнія и знакомящагося съ окружающими его предметами посредствомъ чувства осязанія, представленіе о мірѣ всетаки значительно обобщается, коль скоро этотъ человѣкъ придетъ къ убѣжденію, что кромѣ чувства осязанія можетъ быть еще и иное средство обще-

нія съ міромъ, средство (положимъ, зрѣніе), которымъ человѣкъ нашего примѣра даже сейчасъ и располагать не можетъ, но сознаніе о возможности существованія котораго можетъ побудить того же человѣка къ стремленію развить и усовершенствовать недостающее ему чувство. Точно такимъ же образомъ сознаніе возможнаго расширенія формъ мышленія, подобныхъ понятіямъ о пространствѣ и времени, ставитъ насъ на новую точку зрѣнія относительно познаванія міра и открываетъ намъ новыя возможныя направленія умственной дѣятельности человѣка.

Для того, чтобы, хотя до нѣкоторой степени, представить себѣ возможность измѣненія міросозерцанія съ измѣненіемъ формъ мышленія, прибѣгнемъ къ иллюстраціи, подобной той, которою неоднократно пользовался Гельмгольцъ. Вообразимъ себѣ нѣкоторое существо, которое живетъ и мыслитъ въ нѣкоторой плоскости и которое не имѣетъ способности представить себѣ что-либо существующее внѣ упомянутой плоскости. Пусть, однако, это существо можетъ координировать во времени явленія, происходящія въ его плоскомъ мірѣ. Вообразимъ себѣ, затѣмъ, нѣкоторую группу конусовъ, которые наша плоскость пересѣкаетъ, перемѣщаясь постепенно по перпендикулярному къ себѣ направленію. Группа конусовъ будетъ оставлять на движущейся плоскости слѣды въ видѣ круговъ или иныхъ коническихъ сѣченій, то расширяющихся, то суживающихся, то приближающихся другъ къ другу, то другъ отъ друга удаляющихся, сообразно съ распредѣленіемъ и взаимнымъ положеніемъ упомянутыхъ конусовъ и движущейся плоскости. Мы, имѣющіе способность мыслить въ трехъ пространственныхъ измѣреніяхъ, скажемъ, что существуетъ опредѣленная группа конусовъ, неизмѣнная со временемъ, при чемъ, конечно, мы можемъ мысленно перенестись въ то или другое сѣченіе этихъ конусовъ плоскостію, не теряя изъ виду всей группы. Не такъ представится то же обстоятельство для нашего фиктивнаго существа, живущаго и мыслящаго только въ плоскости. Группа конусовъ скажется ему движеніемъ сходящихся и расходящихся круговъ, или иныхъ коническихъ сѣченій, которыя, можетъ быть, ему покажутся притягивающими или отталкивающими другъ друга, при чемъ, можетъ быть, онъ усмотритъ также, съ своей точки зрѣнія, силы, дѣйствующія между частями одного и того же коническаго сѣченія, и откроетъ законы, управляющіе будто тѣмъ, что онъ называетъ по своему міромъ. Конечно, для насъ, обладающихъ болѣе разнообразными формами мышленія, нежели воображаемое плоскостное существо, его міровые законы представятся совсѣмъ въ иномъ видѣ. Пользуясь подобною же иллюстраціею, мы могли бы до нѣкоторой степени представить себѣ возможность разницы между нашимъ человѣческимъ міровоззрѣніемъ и міровоззрѣніемъ существа, одареннаго, можетъ быть, способностью мыслить болѣе чѣмъ въ трехъ пространственныхъ измѣреніяхъ.

§ 3. *Понятіе объ апріорности идеи не исключаетъ возможности понятія объ ея эволюціи.* Ходячее возраженіе противъ положенія объ апріорности элементовъ мышленія состоитъ въ томъ, что этой теоріи навязывается отрицаніе опыта, отрицаніе эволюціи человѣческаго разума и связи функцій этого послѣдняго съ физіологическими процессами нашего организма. Не трудно усмотрѣть слабыя стороны подобныхъ возраженій.

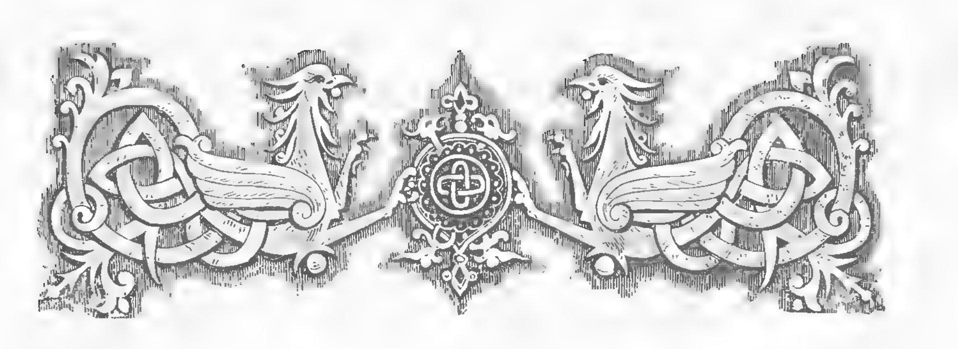
Прежде всего обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что человѣкъ имѣетъ замѣчательную способность наблюдать и обсуждать свои собственные умственные процессы, т. е. объективировать свою субъективную жизнь. Но такое объективированіе возможно для нашего анализирующаго ума не иначе, какъ съ помощію тѣхъ же присущихъ ему формъ мышленія, въ числѣ коихъ на первомъ мѣстѣ стоятъ временныя и пространственныя отношенія. Поэтому очевидно, что теорія апріорныхъ идей не только не можетъ отрицать распредѣленія мыслительныхъ процессовъ во времени и исключать связанное съ такимъ распредѣленіемъ представленіе объ эволюціи, но что подобныя понятіи являются непосредственнымъ слѣдствіемъ этой теоріи, основанной на единствѣ разума и на непрерывности перехода отъ субъекта къ объекту. Эта же непрерывная связь между субъектомъ и объектомъ и обусловливаетъ, между прочимъ, то обстоятельство, что каждый шагъ впередъ въ развитіи нашего самопознанія сейчасъ же отражается шагомъ впередъ въ позваніи объективнаго міра, а также и наоборотъ. Подобнымъ же образомъ нисколько не идетъ въ разрѣзъ съ теоріею апріорныхъ представленій то обстоятельство, что разумъ, обсуждающій объективируемые имъ процессы мышленія, локализируетъ ихъ въ той иди другой части организма, ставя въ причинную связь (опять апріорная категорія) съ наблюдаемыми физіологическими процессами. Для теоріи важно то, что во всѣхъ случаяхъ такого самопознанія представленія и выводы нашего разума ограничены тѣмъ же самымъ опредѣленнымъ конечнымъ числомъ свойственныхъ разуму формъ познанія сущаго, какое ихъ число имѣетъ мѣсто при умозаключеніяхъ объ объективномъ мірѣ. Абсолютное познаніе сущаго мыслимо только подъ условіемъ исчерпанія всѣхъ возможныхъ формъ этого познанія, которыя могутъ намъ представляться не иначе, какъ въ безконечномъ множествѣ.

Обратимся, наконецъ, опять къ легче усвапваемому примѣру цвѣтовыхъ представленій. Замѣтимъ только въ началѣ же, что цвѣтовыя представленія нельзя принимать за полную аналогію съ пространственными или временными представленіями, ибо эти послѣднія входятъ непремѣнными элементами во всѣ наши мысли о мірѣ, тогда какъ первыя не являются неизбѣжными спутниками понятій о вещахъ, распредѣленныхъ въ пространствѣ и времени. Сходство цвѣтовыхъ представленій и апріорныхъ формъ познанія заключается въ ихъ условности, зависящей отъ творящаго ихъ человѣче-

скаго разума. Итакъ, мы до очевидности сознаемъ, что цвѣту, какъ впечатлѣнію, нельзя приписать абсолютно объективнаго существованія, независимаго отъ свойствъ глаза наблюдателя. Однако такое сознаніе никакъ не влечетъ за собою сомнѣнія въ возможности послѣдовательнаго приспособленія глаза къ воспріятію свѣтовыхъ ощущеній и въ участіи многовѣковой практики при вырабатываніи способностей зрительнаго органа. Почему же отрицаніе объективнаго существованія времени и пространства, въ видѣ субстанцій, независимыхъ отъ свойствъ познающаго разума, должно вести къ заключенію объ отсутствіи опыта, послѣдовательнаго приспособленія и прогрессивнаго развитія въ вырабатываніи представленій о временныхъ и пространственныхъ отношеніяхъ? Можетъ быть, поводъ къ подобному недоразумѣнію былъ данъ тѣмъ варіантомъ толкованія теоріи апріорныхъ категорій, по которому эти послѣднія существуютъ данными въ нашемъ представленіи независимо отъ объекта, пріурочиваемаго къ нимъ уже потомъ. Дѣйствительная теорія апріорныхъ формъ познанія не имѣетъ ничего общаго съ ученіемъ о врожденныхъ идеяхъ. Апріорность времени и пространства сказывается только тѣмъ, что эти понятія являются уже включенными a priori во всякое наше сужденіе объ объектѣ, но вовсе не тѣмъ, что они возникли и сложились въ нашемъ умѣ независимо отъ объекта и прежде его. Если наше знаніе только формально и вполнѣ обусловлено свойствами нашего разума, то все же, какой бы видъ и какое бы направленіе это знаніе ни получило, оно немыслимо внѣ всякой зависимости отъ объекта, хотя сущность этой зависимости и оставалась бы для насъ всегда неопредѣленною.

Съ другой стороны, вопросъ объ эволюціи пространственныхъ представленій, или, выражаясь менѣе точно, вопросъ о воспріятіи пространства собственно не относится къ чистой теоріи познанія, будучи предметомъ практической или экспериментальной психологіи. Для теоріи познанія важна классификація и взаимное отношеніе готовыхъ уже понятій, откуда и вытекаетъ заключеніе о способѣ и направленіи мышленія при построеніи міровоззрѣнія. Конечно, трудно сразу представить себѣ, какъ изъ скромной, повидимому, задачи классификаціи понятій могутъ вытекать вопросы о міросозерцаніи; но нужно обратить вниманіе на то, что мы можемъ, правда, говорить, не зная грамматики, мыслить, не зная логики, строить мелодіи, не зная акустики, видѣть безъ оптики, вѣрить безъ знанія; но мы не можемъ познавать безъ теоріи познанія, ибо вѣнецъ и крайній предѣлъ всякаго знанія и представляетъ именно сама теорія познанія.





О числовыхъ суевѣріяхъ.

Число звѣря.

«Здѣсь мудрость. Кто имѣетъ умъ, тотъ сочти число звѣря, ибо это число человѣческое. Число его шестьсотъ шестьдесятъ шесть» (Откровеніе св. Іоанна XIII, 18).

Приведенный текстъ изъ Апокалипсиса всегда производилъ сильное впечатлѣніе на древнихъ и средневѣковыхъ толкователей, занимавшихся апокалиптической литературой. Особенно занимало оно послѣдователей Пиѳагорейской школы, всегда придававшей числамъ особый скрытый и мистическій смыслъ. Надъ выясненіемъ этой загадки трудились многіе въ продолженіе вѣковъ. Толкователи позднѣйшихъ временъ (1835 г.) Бенари, Фритче, Хитцигъ и Реуссъ связывали число 666 со словами «императоръ (Цезарь) Неронъ», написанными по-еврейски:

По древнееврейской системѣ обозначеній чиселъ находящіяся въ этихъ словахъ буквы означаютъ: קסר נרון

ק = 100, ס = 60, ר = 200, נ = 50, ר = 200, ו = 6, ן = 50.

Складывая эти числа (100+60+200+50+200+6+50), получаемъ, дѣйствительно, 666.

Такое скрытое обозначеніе имени Нерона писатели объясняютъ естественной боязнью современниковъ этого полусума-

шедшаго человѣка-звѣря. Когда же съ его смертью мало-по малу страхъ, возбуждаемый его именемъ, прошелъ, то забылось и значеніе числа, принятаго для обозначенія этого имени, и только спустя много времени опять вспомнили о немъ. Во всякомъ случаѣ представляется страннымъ, что одному изъ первыхъ отцовъ церкви — Иринею, жившему, по предположенію, всего около 100 лѣтъ послѣ того, какъ былъ написанъ Апокалипсисъ, была, очевидно, неизвѣстна связь числа 666 съ именемъ Нерона, такъ какъ для объясненія этого числа онъ самъ предлагалъ различныя комбинаціи словъ.

Въ средніе вѣка и позднѣе католики начали считать это число еретическимъ и означающимъ еретиковъ, въ частности протестантовъ. Протестанты, наоборотъ, находили несомнѣнную связь между этимъ числомъ и именемъ, или символомъ папы. Такъ, напр., принимая во вниманіе, что въ латинскомъ языкѣ буквы *M*, *D*, *C*, *L*, *X*, *V*, *I* употребляются въ видѣ числовыхъ знаковъ ($M=1000$, $D=500$, $C=100$, $L=50$, $X=10$, $V=5$, $I=1$), протестанты изъ титула папы «намѣстникъ сына Бога», написаннаго по-латыни (vicarius filii dei) выводили также звѣриное число, какъ видно изъ нижеслѣдующаго.

V I C AR I V SF I L I I D E I
$5+1+100+1+5+1+50+1+1+500+1=666$

Католики, въ свою очередь, производили подобныя же выкладки съ именемъ Мартина Лютера и т. д.— Количество подобныхъ поясненій звѣринаго числа очень велико, и часто эти поясненія настолько противорѣчивы, что взаимно исключаютъ другъ друга. Словомъ, изъ факта, что нѣкоторый ключъ подходитъ къ замку, нельзя ничего вывести, если замокъ такого рода, что въ немъ можно повернуть почти каждый ключъ.

Всякія каббалистическія изысканія подобнаго рода, пожалуй, могутъ представлять извѣстный интересъ, какъ предметъ шутки или съ точки зрѣнія изобрѣтательности и пріемовъ счета, употребляемыхъ толкователями. Но когда подобныя числовыя выдумки употребляются какъ средства религіозной борьбы и возбужденія одной церкви противъ другой, то конечно, мы должны видѣть здѣсь лишь «покушеніе съ негодными средствами».

Числовая мистика.

Пріобрѣвшее всеобщую извѣстность и разсмотрѣнное въ предыдущей замѣткѣ «звѣриное число» принадлежитъ къ одному изъ весьма многочисленныхъ остатковъ той числовой мистики или просто числовыхъ суевѣрій, которыя ведутъ свое начало съ древнѣйшихъ временъ. Изученіе древнѣйшихъ дошедшихъ до насъ памятниковъ халдейской, египетской, индусской и китайской культуры доказываетъ, что древняя наука всегда была связана съ суевѣріемъ даже въ области «точныхъ» математическихъ знаній. Суевѣріе заключается обыкновенно въ томъ, что числамъ или геометрическимъ фигурамъ приписывались извѣстныя таинственныя свойства, устанавливались нѣкоторыя символическія соотношенія между числами, съ одной стороны, и божествами, личностями или событіями, съ другой. На основаніи этихъ соотношеній дѣлались обыкновенно различные выводы, гаданія и предсказанія. Числовая мистика подобнаго рода проходитъ черезъ всю исторію человѣческой культуры вплоть до нашихъ дней. Въ самомъ дѣлѣ, развѣ и въ настоящее время вы не встрѣчаетесь съ разговорами о «чортовой дюжинѣ», о нежеланіи сидѣть за столомъ въ числѣ 13-ти человѣкъ, о счастливыхъ и несчастливыхъ числахъ и дняхъ въ мѣсяцѣ и недѣлѣ, о той или иной роли. которую какое-либо число играетъ въ жизни какого-либо (обыкновенно «знаменитаго») человѣка и т. д.?

Человѣческому духу свойственно стремленіе къ чему-то болѣе общему и таинственному, чѣмъ то, что дается однимъ опытомъ (эмпиризмомъ) и нагляднымъ представленіемъ. Отвлекаясь въ область обобщенія и «чистаго разума», этотъ бѣдный человѣческій разумъ на первыхъ порахъ часто впадаетъ въ *слишкомъ* широкія обобщенія, подсказываемыя только однимъ «маленькимъ допущеніемъ» въ область... «сверхзнанія».

Въ отдѣлѣ о пространствѣ 4-хъ измѣреній намъ уже приходилось упоминать, какъ даже въ наше время чисто алгебраическое и аналитическое допущеніе «спириты» поспѣшили обратить въ какой-то «дѣйствительный міръ, населенный какими то «духами» и т. д. Что же удивительнаго въ томъ, что из-

начала человѣческой культуры въ науку просто чиселъ вошелъ было элементъ таинственности и мистицизма, кажущійся теперь, пожалуй, смѣшнымъ, но въ свое время способствовавшій разработкѣ познанія чиселъ. Такъ, въ свое время мистическія бредни алхиміи и астрологіи способствовали появленію наукъ химіи и астрономіи. Такъ, въ настоящее время запутанные толки разныхъ «спиритовъ» и «теософовъ» объ области духовъ 4-хъ измѣреній вызываютъ людей трезвой науки дать свои заключенія и продолжить свои изслѣдованія хотя бы въ той же области *геометріи 4-хъ измѣреній*. Математика не должна бояться вопросовъ, а идти впереди ихъ.

Вотъ почему хотя бы бѣглый обзоръ мистики чиселъ въ исторіи развитія математическихъ знаній полонъ глубокой поучительности. Съ одной стороны, мы видимъ, какъ изъ общей массы всякихъ мистическихъ бредней и суевѣрій, словно зерно отъ шелухи, отдѣляется, въ концѣ концовъ, истинное знаніе. Съ другой,—интересно прослѣдить, какъ черезъ вѣка и тысячелѣтія доходятъ до нашихъ временъ извѣстныя суевѣрія и предразсудки.

Исторія обыкновенно такова: вымираютъ ученыя касты, разрушаются и гибнутъ культуры. Но тѣмъ или инымъ путемъ какое-либо мистическое ученіе проникаетъ въ широкія народныя массы и передается отъ народа къ народу, Богъ вѣсть, какими неуловимыми путями, и перерабатывается каждой народностью въ своеобразныя и причудливыя формы. Такъ, напр., въ задачѣ 4-ой настоящей книги можно съ большой долей вѣроятности видѣть отголоски древнѣйшихъ суевѣрій, связанныхъ съ числомъ 7.

Помимо египетскаго папируса Ахмеса, къ самымъ древнѣйшимъ памятникамъ математики принадлежатъ дошедшія до насъ таблички *клинообразныхъ* письменъ халдейской или вавилоно-ассирійской культуры. По взгляду большинства ученыхъ, халдейская культура есть наслоеніе двухъ культуръ: древнѣйшей—сумерійской и другой болѣе поздней—семитической.

Сумерійской культурѣ принадлежитъ единственная въ своемъ родѣ система *клинообразнаго* письма. Каждая буква въ этомъ письмѣ составлена изъ собранія черть, имѣющихъ видъ клина

или гвоздя. Матеріаломъ для писанія служили квадратныя плитки изъ обожженной глины. Древнѣйшія поселенія Сумеровъ были на нижнемъ Евфратѣ: тамъ находились ихъ города Уръ и Сенкере. Въ Сенкере при раскопкѣ цѣлой громадной библіотеки найдены были въ 1854 г. двѣ глиняныя таблички, имѣющія не болѣе 15 миллиметровъ въ длину и ширину. Ученый Раулинсонъ указалъ, что одна изъ этихъ глиняныхъ табличекъ есть таблица квадратовъ цѣлыхъ чиселъ. Впослѣдствіи Ленорманъ показалъ, что вторая табличка есть табличка кубовъ.

Эти двѣ таблички, по мнѣнію Сэйса, извѣстнаго ассиріолога, составлены между 2300 г. и 1600 г. до Р. Х. По мнѣнію же другихъ, ихъ слѣдуетъ отнести къ еще болѣе раннему времени, а именно за 4500 лѣтъ до Р. Х. Если послѣднія предположенія вѣрны, то найденнымъ табличкамъ не менѣе 6000 лѣтъ. Можно думать, что таблички имѣютъ связь съ халдейской мистикой чиселъ. Вотъ что говоритъ по этому поводу проф. А. В. Васильевъ въ своей интересной публичной лекціи, прочитанной въ пользу высшихъ женскихъ курсовъ въ Казани въ 1886 году. Приводимъ изъ этой лекціи обширную выдержку:

Въ одной изъ табличекъ Ниневійской библіотеки царя Ассурбанипала сохранились имена главныхъ боговъ и противъ каждаго имени бога стоитъ извѣстное мистическое число, ему соотвѣтствующее. Напротивъ, злымъ демонамъ соотвѣтствуетъ рядъ дробныхъ чиселъ.

Встрѣчаются и заклинанія, основанныя на силѣ чиселъ. Тайна, которую божество Сумеровъ Эа повѣряетъ своему сыну, называется числомъ.

Въ собраніи риѳмованныхъ пословицъ и старыхъ народныхъ сумерійскихъ пѣсенъ мы встрѣчаемъ два куплета, которые, повидимому, должно было пѣть на сельскомъ праздникѣ:

«Злакъ, поднимающійся прямо, достигнетъ благополучнаго конца роста; число для этого мы знаемъ.

«Злакъ изобилія достигнетъ благополучнаго конца роста; число для этого мы знаемъ».

Къ сожалѣнію, хотя въ сохранившихся памятникахъ магіи

часто упоминаются заговоры числами, хотя мы и знаемъ, что число 7 играло при этомъ особенно таинственную роль, но ни одинъ изъ заговоровъ не достигъ до насъ.

Такова роль чиселъ въ халдейской цивилизаціи.

Мы имѣемъ, поэтому, право предполагать, что наши (сенкерейскія) таблички столько же могли служить для цѣлей практической жизни, сколько и для составленія комбинацій, основанныхъ на свойствахъ чиселъ и имѣющихъ мистическое значеніе, употреблявшихся, можетъ быть, при гаданіяхъ.

Нельзя не поставить, напр., табличку кубовъ въ связь съ числомъ 36, равнымъ суммѣ кубовъ первыхъ трехъ чиселъ 1, 2, 3 и вмѣстѣ съ тѣмъ равнымъ суммѣ первыхъ четырехъ четныхъ и первыхъ четырехъ нечетныхъ чиселъ.

Это число тридцать шесть имѣло весьма важное значеніе на двухъ почти противоположныхъ концахъ стараго континента: въ Греціи, у пиѳагорейцевъ, и въ Китаѣ. У пиѳагорейцевъ высшая, самая страшная клятва была клятва числомъ тридцать шесть. Весь міръ, по ихъ мнѣнію, былъ составленъ изъ четырехъ первыхъ четныхъ и четырехъ первыхъ нечетныхъ чиселъ. У китайцевъ четыре первыя четныя числа представляютъ чистые и небесные элементы мірозданія, четыре первыя нечетныя числа—нечистые и земные, и сумма ихъ, т.-е. число тридцать шесть, символиризуетъ міръ.

Такая поразительная аналогія всего легче можетъ быть объяснена допущеніемъ, что идея о таинственномъ значеніи числа тридцать шесть возродилась еще на халдейской почвѣ, и вліяніемъ халдейскихъ идей, съ одной стороны, на крайній Востокъ, съ другой стороны—на Грецію. Такое вліяніе халдейской культуры нисколько неудивительно, если мы припомнимъ ту степень развитія, которой она достигла, напримѣръ, во времена Ассурбанипала (721—606 г. до Р. Х.), когда въ его дворцѣ находилась громадная библіотека, открытая для всеобщаго пользованія, содержавшая трактаты по грамматикѣ, исторіи, законовѣдѣнію, миѳологіи, естествознанію, астрономіи, астрологіи (содержаніе всей этой библіотеки заняло бы, по словамъ Смита, болѣе 500 томовъ in 4° по 500 стр. въ каждомъ), когда существовали уже археологи, по приказанію царя пере-

водившие сумерійскія надписи на языкъ, бывшій въ то время въ употребленіи.

Есть еще другія основанія думать, что именно халдейскія идеи о таинственномъ соотношеніи между числами и явленіями, приводившія халдеевъ только къ заговорамъ и заклинаніямъ, обратились у даровитаго и одареннаго философскимъ духомъ греческаго народа въ важное философское ученіе Пиѳагора, положившее въ основаніе объясненія природы *числа*. Ученіе было создано Пиѳагоромъ, который, какъ говорятъ его жизнеописатели, жилъ долгое время на Востокѣ и между прочимъ посвятилъ продолжительное время изученію халдейской магіи. Мы имѣемъ, кромѣ того, свидѣтельство Ямблиха, который прямо указываетъ на халдейское происхожденіе многихъ математическихъ теоремъ. Сущность Пиѳагорейскаго ученія заключается въ слѣдующихъ словахъ ихъ ученія: «Вещи суть копіи чиселъ, числа—начала вещей».

Они почитали числа не только какъ основаніе всякаго познанія, не только какъ причину всякаго порядка и всякой опредѣленности, не только какъ управляющую міромъ божественную силу, но и прямо объявили, что міръ состоитъ изъ чиселъ.

Если одинъ толчокъ къ этому философскому ученію былъ данъ халдейскимъ взглядомъ на числа, то другой несомнѣнно былъ данъ подмѣченною великимъ умомъ Пиѳагора математическою опредѣленностью многихъ явленій. Современная наука и положительная философія ставятъ цѣлью познанія—раскрывать во всѣхъ явленіяхъ эту математическую опредѣленность. Припомнимъ, напримѣръ, слова Канта: «въ каждомъ знаніи есть столько науки, сколько математики». Но мы не отождествляемъ теперь эту математическую опредѣленность явленій съ самими явленіями, какъ это сдѣлала Пиѳагорейская школа. Съ ея точки зрѣнія, объявившей всѣ вещи числами, естественно было затѣмъ заняться рѣшеніемъ вопросовъ, какія числа соотвѣтствуютъ какимъ вещамъ; и здѣсь открылся широкій просторъ ихъ фантазіи.

Прежде всего они объявили различіе между четными и нечетными числами соотвѣтствующимъ различію между ограничен-

нымъ и неограниченнымъ, между мужскимъ и женскимъ. Затѣмъ они пошли далѣе. Справедливость, напримѣръ, которая отдаетъ равнымъ равное, отожествлялась съ квадратными числами, въ которыхъ оба множителя равны, напримѣръ, съ числомъ 4 или съ числомъ 9. Число 5, какъ сумма перваго мужского числа (3) и женскаго (2) (единица у пиѳагорейцевъ не считалась сама числомъ, а только началомъ всѣхъ чиселъ), называлось бракомъ.

Особенно важное таинственное значеніе придавалось двумъ числамъ: числу 7, которое играло такую важную роль въ халдейской миѳологіи, и числу 36, которое извѣстно было подъ названіемъ Tetractys. Я уже говорилъ о значеніи этого числа и о томъ, что это число, вѣроятно, также вавилонскаго происхожденія. Его особенности носятъ чисто математическій характеръ, и вообще пиѳагорейцы, установляя аналогіи между числами и вещами, должны были вдумываться въ математическія свойства цѣлыхъ чиселъ, тѣ свойства, которыми теперь занимается теорія чиселъ. Вотъ почему Пиѳагоръ и его школа могутъ считаться основателями этой науки. Школа Пиѳагора первая разсматривала рядъ чиселъ треугольныхъ. Такъ называются числа, которыя получаются, складывая подъ-рядъ, начиная съ перваго, нѣсколько цѣлыхъ чиселъ; таковы числа: 3, 6, 10,... Они же разсматривали числа «совершенныя», въ которыхъ сумма дѣлителей равна самому числу, и числа «дружественныя», т. е. пары чиселъ, изъ которыхъ первое равно суммѣ дѣлителей второго, и второе равно суммѣ дѣлителей перваго. Таковы, напр., 220 и 284. Ямблихъ, жизнеописатель Пиѳагора, разсказываетъ, что Пиѳагора спросили однажды, что такое другъ. Отвѣтъ былъ: «Тотъ, кто есть другой я, вотъ какъ числа 220 и 284».

Всѣ эти вопросы о треугольныхъ, совершенныхъ, дружественныхъ числахъ занимали затѣмъ наиболѣе извѣстныхъ математиковъ, напр., Эйлера.

Основная идея Пиѳагорейской школы имѣла большое вліяніе и на философію Платона, великаго почитателя математики, а стѣнахъ Академіи начертавшго: «Пусть никто не входитъ э, кто не занимается геометріею». Платонъ и нѣкоторые учениковъ не были свободны отъ числовой мистики.

Но съ особенною силою возродилась эта числовая мистика въ ученіяхъ неоплатониковъ и неопиѳагорейцевъ, философскихъ школъ, образовавшихся въ то время, когда вліяніе Востока, и въ томъ числѣ халдейской религіи, халдейской магіи сдѣлалось особенно сильнымъ. У неопиѳагорейцевъ, напр., *число* есть прототипъ міра, первоначальная мысль божества, властитель надъ формами и идеями, посредствующій членъ между богомъ и міромъ. Понятно, что при такомъ взглядѣ на первый планъ должно было выступить теологическое, метафизическое и натурфилософское значеніе чиселъ. Понятнымъ дѣлается появленіе сочиненій, имѣющихъ заглавіемъ: «Ариѳметическія изслѣдованія о Богѣ и Божественныхъ вещахъ, или Ариѳметическія теологіи». Въ этой «Ариѳметической теологіи», авторъ которой есть неопиѳагореецъ язычникъ Никомахъ, слѣдующимъ образомъ разсматриваются числа отъ 1 до 10:

Единица есть божество, разумъ, добро, гармонія, счастье; она называется Аполлонъ, Геліосъ; но она можетъ разсматриваться и какъ матерія, тьма, хаосъ.

Два есть принципъ неравенства, предположенія; оно есть матерія, природа, вещество, основаніе всякой множественности; оно должно носить имя матери боговъ Изиды; оно есть источникъ всякой гармоніи, храбрость, потому что изъ него развиваются смѣло всѣ остальныя числа... и т. д. въ томъ же родѣ,

Послушаемъ еще еврея Филона. Вотъ какъ онъ объясняетъ, почему люди послѣ потопа жили 120 лѣтъ. Число 120 есть сумма 15 первыхъ чиселъ, 15 есть число свѣта, ибо послѣ новолунія въ 15 дней является полная луна; притомъ 120 есть 15-е треугольное число, имѣетъ пятнадцать различныхъ дѣлителей и всѣ частныя суть весьма важныя числа, при томъ сумма ихъ равняется 240, т. е. вдвое больше 120, что имѣетъ несомнѣнное отношеніе къ двойной жизни, духовной и тѣлесной, и т. д. и т. д. въ томъ же родѣ.

Подобныя же числовыя мистическія соотношенія находимъ мы у другихъ философовъ того же времени — Плотина, Ямблиха и другихъ.

Если такія соотношенія занимали выдающихся философовъ, то можно себѣ вообразить, какъ вообще были развиты число-

выя бредни, предсказанія посредствомъ чиселъ и т. п. и т. п. среди массы общества. Къ этому-то времени относится извѣстный эдиктъ Юстиніана, изгонявшій изъ столицъ, вмѣстѣ съ астрологами, магами, и математиковъ; тогда-то математики и были объявлены злодѣями — mathematici-malefici.

Но наряду съ числовыми брелнями шло изученіе математическихъ свойствъ цѣлыхъ чиселъ. Тотъ же Никомахъ написалъ «Введеніе въ ариѳметику»—сочиненіе чисто научное, въ которомъ въ первый разъ дано полное ученіе о фигурныхъ числахъ, изложено ариѳметически ученіе о пропорціяхъ и т. п.

Каббала.

Изъ древности перешло въ средніе вѣка и здѣсь пышнымъ цвѣтомъ развилось цѣлое полурелигіозное, полуфилософское ученіе, носящее названіе *каббалы*. Это мистическое ученіе развивалось преимущественно евреями. Въ немъ наряду съ мистикой пиѳагорейцевъ, приписывавшей особенно таинственное значеніе самому числу, придавалось еще значеніе составленію чиселъ изъ буквъ слова. Буквамъ азбуки приписываются по порядку числа

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\ 10,\ 20,\ 30,\ldots$$

Въ такомъ случаѣ каждому слову будетъ соотвѣтствовать извѣстное число. Соотношенія же, существующія между такими числами, указываютъ, молъ, на соотношенія между лицами или событіями. Такое суевѣріе носило имя «*каббалистики*», и оно играло важную роль въ ученіи каббалы.

Въ исторіи философіи ученіе это сыграло довольно важную роль. Сущность его—пантеизмъ. Вотъ почему въ ученіи великаго философа-еврея Спинозы многіе не безъ основанія видятъ вліяніе каббалы. Подъ ея же вліяніемъ сложилась та числовая тарабарщина, которая играла извѣстную роль въ заклинаніяхъ алхимиковъ и магиковъ среднихъ вѣковъ, между которыми встрѣчаемъ время отъ времени такія почтенныя въ наукѣ имена, какъ Реймонда Лулліуса, гуманиста Рейхлина, Рожера Бэкона, врача Парацельса и мн. др.

Не разъ въ одной и той же личности совмѣщалось страстное увлеченіе каббалистикою съ не менѣе страстною любовью къ наукѣ. Однимъ изъ такихъ людей былъ извѣстный математикъ XVI столѣтія Михаилъ Стифель. Ему, напримѣръ, обязана алгебра введеніемъ знаковъ + и —, знака для корня и пр. И въ то же время складъ его ума постоянно увлекалъ его къ числовой мистикѣ.

Изъ текста *Videbunt in quem transfixerunt* (воззрятъ на того, кого пронзили), придавая буквамъ числовыя значенія, онъ вывелъ предсказаніе о погибели міра въ 1533 году, и крестьяне его прихода (Стифель былъ протестантскій пасторъ), расточившіе въ ожиданіи близкой кончины міра все свое имущество, когда кончины міра не послѣдовало, подъ ударами прогнали его въ Виттенбергъ, гдѣ онъ былъ спасенъ только благодаря личному заступничеству Лютера. Другой разъ, сидя въ ваннѣ, онъ составилъ сумму чиселъ, приходящихся на фразу *Vae tibi, Papa, vae tibi* (Горе тебѣ, папа, горе тебѣ!) и восторгъ его, когда получилось число 1260, мистическое число, былъ такъ великъ, что, подобно Архимеду, онъ выскочилъ изъ ванны, провозглашая «великое открытіе».

Но вскорѣ послѣ Стифеля наука теоріи чиселъ дѣлается уже независимой отъ числовой мистики, и послѣдняя становится достояніемъ только массы или мистиковъ, имѣющихъ весьма мало общаго съ наукою.

Изъ Запада числовая мистика всякаго рода перешла и въ Россію, гдѣ держалась весьма долго. Существуетъ «Ариѳмологія» 17-го вѣка, переведенная молдаваниномъ Спафаріемъ съ греческаго языка. Вопросы въ ней основаны на таинственномъ значеніи чиселъ. Вотъ эти значенія чиселъ до 12-ти, изложенныя стихами:

Дванадесять апостоловъ;
Единъ десять праотецъ;
Десять Божьихъ заповѣдей;
Девять въ году радостей;
Восемь круговъ солнечныхъ;
Семь чиновъ ангельскихъ;

Шесть крылъ Херувимскихъ;
Пять ранъ безъ вины Господь терпѣлъ;
Четыре мѣста Евангельски;
Три патріарха на землѣ;
Два главля Моисеовыхъ;
Единъ сынъ Маріинъ
Царствуетъ и ликуетъ
Господь Богъ надъ нами.

Тайнопись.

Настоящая глава можетъ служить какъ дополненіемъ предыдущаго, такъ и полезнымъ введеніемъ въ излагаемую дальше «Теорію соединеній». Съ одной стороны, мы увидимъ, что комбинаціями чиселъ и буквъ можно пользоваться не для мистическихъ, а чисто практическихъ цѣлей секретнаго письма. Съ другой, искусство тайнописи, какъ увидимъ ниже, многими сторонами примыкаетъ и связывается съ такъ называемыми *перестановками*, *размѣщеніями* и *сочетаніями*.

Потребность въ такомъ способѣ письма, который скрывалъ бы смыслъ написаннаго отъ посторонняго глаза и дѣлалъ бы его доступнымъ лишь для немногихъ посвященныхъ, существуетъ у людей съ древнихъ поръ. Отсюда и возникло искусство секретнаго письма, разросшееся въ наши дни чуть не до размѣровъ цѣлой науки—*криптографіи*. О тайнописи упоминаетъ еще Геродотъ и даже приводитъ образцы такихъ писемъ, которыя понятны лишь адресату. По свидѣтельству Плутарха, у спартанцевъ были въ употребленіи специальные механическіе приборы для записыванія и прочтенія тайныхъ посланій. Для записыванія религіозныхъ тайнъ жрецы пользовались особыми письменами, непонятными для непосвященныхъ.

У Юлія Цезаря была своя система тайнописи, при помощи которой онъ записывалъ свои тайны; *она была основана на замѣнѣ одниxъ буквъ другими*,—пріемъ употребительный и въ наше время.

Въ средніе вѣка надъ изобрѣтеніемъ и усовершенствованіемъ криптографическихъ системъ работали многіе выдающіеся умы—какъ, напр., философъ Бэконъ Веруламскій, математикъ Віета, историкъ Гуго Гроцій и др.

Но высшаго своего развитія криптографія достигла лишь въ новое время, съ развитіемъ дипломатическихъ сношеній и сложныхъ торговыхъ оборотовъ, требующихъ соблюденія строжайшей тайны. Въ наши дни ежедневно по всему міру циркулируютъ сотни и тысячи такъ называемыхъ шифрованныхъ, т. е. тайнописныхъ телеграммъ. Важнѣйшія административныя мѣры во всѣхъ почти странахъ передаются шифрованными телеграммами. Точно также шифруется и большая часть военныхъ депешъ. Въ Германіи каждый офицеръ долженъ знать криптографію. Мы не говоримъ уже о дипломатахъ, которымъ «языкъ данъ для того, чтобы скрывать свои мысли»: они не останавливаются ни передъ какими затратами денегъ и времени, чтобы, полно и точно передавая депешу по назначенію, сохранить въ то же время и строжайшую тайну. Тайнопись находитъ себѣ обширное примѣненіе и въ торговомъ мірѣ, при разнаго рода биржевыхъ и т. п. спекуляціяхъ. Корреспонденты большихъ заграничныхъ газетъ, желая, чтобы ни одна газета не предупредила ихъ органъ въ опубликованіи какого-нибудь сенсаціоннаго извѣстія, также шифруютъ свои телеграммы.

Въ дальнѣйшемъ мы знакомимъ съ нѣкоторыми пріемами тайнописи. Читатель самъ сможетъ разсудить, насколько много въ криптографіи «математики». Но если математикѣ, собственно говоря, принадлежитъ здѣсь довольно скромная роль, то во всякомъ случаѣ легко убѣдиться, что свободное пользованіе тайнописью требуетъ, все же, запаса сообразительности и остроумія,—словомъ, въ обширномъ царствѣ смекалки и этому отдѣлу должно быть удѣлено извѣстное вниманіе.

Простая замѣна.

Казалось бы, самой простой системой тайнописи была бы простая замѣна общепринятыхъ буквъ какими-нибудь условными знаками или числами. Но это, какъ оказывается, далеко не

надежная тайнопись, и при извѣстномъ навыкѣ очень легко доискаться до истиннаго смысла подобной криптограммы.

Пусть, напримѣръ, въ наши руки попала слѣдующая криптограмма, написанная по способу простой замѣны буквъ какими-нибудь числами (такъ что одинаковыя буквы замѣнялись одинаковыми же числами). Отдѣльныя слова разграничены тире, а буквы—запятыми.

1, 2, 3—2, 4—5, 6, 7, 8, 5, 9—2, 3, 8, 10—11, 12, 2, 9,
13, 5, 14, 15, 16—1, 17, 18, 19, 10—7—5, 11, 2, 10—15, 11, 19, 16, 20, 2, 21, 22.
23, 11, 15, 10—20, 18, 5, 11, 13, 10—24, 7, 25, 26—11, 15, 2, 11, 27, 13, 16, 20, 2, 21, 22.
17, 18, 27, 15, 18, 4, 8, 5, 9—28, 24, 7, 27, 10—1, 4, 2, 9.

Съ самаго начала видно, что передъ нами стихи,—тождество концовъ строкъ обличаетъ риѳмы.

Вотъ одинъ изъ многихъ возможныхъ путей дешифрированія заданной криптограммы.

Обращаемъ вниманіе на второе слово первой строки—2,4. Цифра 4 не можетъ быть ъ, такъ какъ она встрѣчается въ серединѣ другихъ словъ той же криптограммы. Такимъ образомъ, 2,4 можетъ быть *бы*, *ли*, *не*, *на*. . .

Сопоставляя первыя два слова криптограммы:

1, 2, 3—2, 4

и принимая во вниманіе, что въ послѣднемъ словѣ четвертой строки (1, 4, 2, 9) цифры и 1 и 4 стоятъ рядомъ (слѣд., если 4 гласная, то 1 скорѣе всего согласная),—убѣждаемся рядомъ пробъ, что слова

1, 2, 3—2,4

суть:—*мнѣ не*.

Подставивъ во всѣхъ словахъ вмѣстѣ 1, 2, 3 и 4, буквы *м*, *н*, *ѣ*, *е*, обращаемъ вниманіе на четвертое слово первой строки—2, 3,8,10 = *нѣ* 8, 10. Очевидно, передъ нами слово *нѣтъ:* это подтверждается и частой повторяемостью числа 10 на концѣ словъ, заставляющей подозрѣвать въ ней букву ъ.

Точно такъ же выясняется, что послѣднее слово четвертой строки 1, 4, 2, 9 = *мен* 9 = *меня.*

Сдѣлавъ подстановку, обращаемъ вниманіе на первое слово четвертой строки:

17, 18, 27, 15, 18, *е*, *т*, 5, *я*

Подозрѣваемъ глагольную форму *тся*. Испытывая 5 = *с*, убѣждаемся, что третье слово первой строки: *с*, 6, 7, *тся* и четвертое второй строки: *с*, 11, *нъ*, –суть *спится* и *сонъ*.

(Слово *сынъ* отвергаемъ, ибо число 11, какъ стоящее въ началѣ послѣдняго слова первой строки, не можетъ быть *ы*).

Подставивъ найденныя буквы въ остальныя слова криптограммы, поступаютъ далѣе по тому же методу, т. е. обращаютъ прежде всего вниманіе на тѣ слова, въ которыхъ либо больше всего извѣстныхъ буквъ, либо получается характерное ихъ размѣщеніе. При этомъ, уловивъ размѣръ стиха, можно пользоваться правилами стихосложенія, угадывая число слоговъ въ словѣ (а слѣдовательно, и гласныхъ буквъ). Не слѣдуетъ пренебрегать и указаніями, которыя дастъ риѳма.

Въ результатѣ всѣхъ поисковъ, пробъ, подстановокъ и т. п. получаемъ слѣдующее четверостишіе (А. С. Пушкина):

Мнѣ не спится, нѣтъ огня,
Всюду мракъ и сонъ докучный;
Ходъ часовъ лишь однозвучный
Раздается близъ меня.

Въ общемъ весь ходъ дешифрированія сходенъ до извѣстной степени съ методомъ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія рядомъ испытаній.

Между прочимъ, какъ извѣстно. древне-египетскіе іероглифы были «дешифрированы» именно такимъ путемъ.

Что такое „тарабарская грамота“?

Мы часто употребляемъ это выраженіе, но мало кто знаетъ его точный смыслъ. А между тѣмъ это просто опредѣленный видъ тайнописи, бывшій въ употребленіи въ древней Руси.

Согласныя буквы располагались въ два ряда, какъ показано ниже:

б	*в*	*г*	*д*	*ж*	*з*	*к*	*л*	*м*	*н*
щ	*ш*	*ч*	*ц*	*х*	*ф*	*т*	*с*	*р*	*п*

и при писаніи употребляли вмѣсто верхнихъ согласныхъ нижнія, и наоборотъ. Гласныя же оставались безъ замѣны.

Такъ слово *человѣкъ* по «тарабарской грамотѣ» получало начертаніе: *чесошѣтъ*.

Само собой разумѣется, что такая тайнопись легко дешифрируется и не гарантируетъ тайны.

Другое названіе для «тарабарской грамоты»—«простая литорея», въ отличіе отъ «мудрой литореи», представлявшей болѣе сложную систему древне-русской тайнописи.

Системы перестановокъ.

Мы видѣли, что простая замѣна обычнаго алфавита другими условными знаками нисколько ни гарантируетъ тайны написаннаго: при извѣстномъ навыкѣ и остроуміи не трудно возстановить полностью весь шифрованный текстъ, не зная условнаго алфавита. Поэтому простой замѣной для серьезныхъ цѣлей никогда и не пользуются. Гораздо надежнѣе шифровать по методу такъ наз. *транспозиціи* (перестановки). Вотъ одинъ изъ простѣйшихъ способовъ.

Положимъ, требуется передать такую фразу:

Скупайте акціи Нобеля.

Располагаютъ буквы этой фразы въ клѣткѣ прямоугольника въ какомъ-нибудь опредѣленномъ порядкѣ, напримѣръ снизу вверхъ:

п	*е*	*і*	*б*	*г*
у	*т*	*ц*	*о*	*я*
к	*й*	*к*	*н*	*л*
с	*а*	*а*	*и*	*е*

(Буква *г* поставлена лишь для заполненія пустого квадратика и не должна приниматься во вниманіе при дешифрированіи).

Теперь пишутъ буквы нашей таблички слѣва направо въ одну строку:

п е і б у т ц о я к й к н л с а а и е

и эту «тарабарщину» посылаютъ адресату. Послѣднему остается лишь размѣстить буквы въ рѣшеткѣ и читать написанное колоннами снизу вверхъ. Само собою разумѣется, что форма рѣшетки (5 × 4) и порядокъ чтенія (снизу вверхъ) составляютъ секретъ, извѣстный лишь отправителю и адресату. А такъ какъ рѣшетка можетъ быть самой разнообразной формы, точно такъ же какъ и порядокъ чтенія (сверху внизъ, по діагоналямъ и т. п.), то непосвященному довольно трудно дешифрировать такое посланіе.

Одно время въ военныхъ вѣдомствахъ всѣхъ странъ была весьма употребительна система тайнописи, близкая къ только что описанной. Объяснимъ эту систему на примѣрѣ. Подлежитъ передачѣ фраза:

Главнокомандующій прибудетъ въ семь вечера.

Принятъ опредѣленный числовой «ключъ» шифра, составляющій, конечно, тайну для непосвященныхъ. Пусть такимъ «ключомъ» служитъ 23154.

Располагаемъ буквы депеши слѣдующимъ образомъ:

1.	2.	3.	4.	5.
г	*л*	*а*	*в*	*н*
о	*к*	*о*	*м*	*а*
н	*д*	*у*	*ю*	*щ*
і	*й*	*п*	*р*	*и*
б	*у*	*д*	*е*	*т*
в	*с*	*е*	*м*	*ъ*
в	*е*	*ч*	*е*	*р*
а	*г*	*г*	*г*	*г*

Затѣмъ переставляемъ колонны буквъ въ порядкѣ нашего ключа:

2.	3.	1.	5.	4.
л	*а*	*г*	*н*	*в*
к	*о*	*о*	*а*	*м*
д	*у*	*н*	*щ*	*ю*
й	*п*	*і*	*и*	*р*
у	*д*	*б*	*т*	*е*
с	*е*	*в*	*ъ*	*м*
е	*ч*	*в*	*р*	*е*
z	*z*	*а*	*z*	*z*

Остается написать теперь всѣ буквы въ обыкновенномъ порядкѣ слѣва направо:

л а г н в к о о а м д у н щ ю й п і и р у д б т е
с е в ъ м е ч в р е z z а z z

Знающій «ключъ» легко прочтетъ такую телеграмму,—но попробуйте прочесть ее безъ «ключа»! Разумѣется, если перебрать всѣ возможныя перестановки изъ 40 элементовъ, то успѣхъ обезпеченъ, но для такой работы, какъ мы убѣдимся далѣе, нужны цѣлые годы.

Къ тому же, мы примѣнили эту систему пока лишь въ самомъ простомъ ея видѣ. Нѣтъ ничего легче еще болѣе затруднить дешифрированіе, почти нисколько ни затрудняя адресата. Такъ въ предыдущемъ примѣрѣ можно было условиться телеграфировать строки не въ ихъ естественномъ порядкѣ сверху внизъ, а въ любомъ иномъ:—сначала всѣ нечетныя строки, затѣмъ четныя; или въ алфавитномъ порядкѣ буквъ крайней колонны и т. п. Наконецъ, для вящшаго сохраненія тайны можно каждую букву замѣнить другой, отстоящей отъ нея въ алфавитѣ на опредѣленное число буквъ.

Квадратный шифръ.

Самая остроумная система этой категоріи тайнописи—употребленіе такъ наз. *квадратнаго* шифра. Суть его въ слѣдующемъ.

Буквы алфавита располагаютъ въ вертикальные и горизонтальные ряды, какъ показано въ прилагаемой схемѣ:

	а	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*		*э*	*ю*	*я*	*ѳ*
а	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*		*ю*	*я*	*ѳ*	*а*
б	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*	*і*		*я*	*ѳ*	*а*	*б*
в	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*	*і*	*к*		*ѳ*	*а*	*б*	*в*
.	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.

и т. д. до конца алфавита.

Условный ключъ—слово «пушка». Чтобы зашифровать по этому способу ту же фразу «главнокомандующій прибудетъ въ семь вечера», производимъ слѣдующія манипуляціи; пишемъ буквы нашего ключа надъ буквами депеши:

п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у
г л а в н о к о м а н д у ю щ і й п р и б у д е т ъ в ъ с е м ъ
ш к а п у ш.
в е ч е р а.

Каждая буква нашей депеши вмѣстѣ съ соотвѣтствующей буквой ключа послужатъ намъ теперь координатами для избранія буквъ вышеприведенной таблицы. Въ вертикальной колоннѣ *г* и горизонтальномъ ряду *п* найдемъ букву *у*. Это и будетъ первая буква шифрованнаго текста. Далѣе на пересѣченіи колонны *л* и ряда *у* находимъ *я*—это вторая буква и т. д. Слово «главнокомандующій» изобразится при этомъ такъ:

у я щ н о ю ю ж ш б э ш к і ъ щ э

Легко усмотрѣть на этомъ примѣрѣ одно серьезное преимущество квадратнаго шифра: въ немъ однѣ и тѣ же буквы (*ю*, *ю*; *щ*, *щ*; *э*, *э*) обозначаютъ на самомъ дѣлѣ совершенно различные звуки; и, наоборотъ,—одинаковые звуки (*а*, *о*) получаютъ различное начертаніе (*а* = *щ* = *б*; *о* = *ю* = *ж*). Это создаетъ неимовѣрныя трудности для всякаго, кто пожелалъ бы разгадать смыслъ депеши, не зная «ключа». А между тѣмъ адресатъ, имѣющій ключъ («пушка»), безъ большихъ хлопотъ

прочтетъ эту тарабарщину. Стоитъ ему лишь написать ключъ надъ текстомъ:

п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у
у я щ н о ю ю ж ш б э ш к і ъ щ э

и затѣмъ при разысканіи истинныхъ буквъ задаваться каждый разъ вопросомъ: какая буква помѣщена въ первомъ ряду таблицы надъ такой-то буквой такого-то ряда? Напр., для розысканія первой буквы спрашиваемъ: что стоитъ надъ *у* въ горизонтальномъ рядѣ *п*? Оказывается: *г* и т. д., пока не получимъ въ результатѣ все слово «главнокомандующій».

Словари для шифрованія.

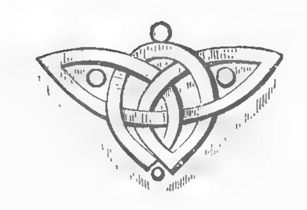
Какъ ни остроумна система квадратнаго шифра, какъ ни затрудняетъ она чтеніе криптограммы непосвященнымъ,—все же дипломаты не считаютъ ее достаточно надежной. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что любопытствующій членъ дипломатическаго корпуса сосѣдней державы раздобылся текстомъ шифрованнаго посланія и какимъ-либо путемъ раскрылъ смыслъ одного лишь слова,—напр. въ вышеприведенной телеграммѣ ему посчастливилось заподозрить въ первой длинной группѣ буквъ слово «главнокомандующій»,—уже этого ему достаточно, чтобы рядомъ пробъ и испытаній добраться до «ключа» и, слѣдовательно, дешифрировать все посланіе.

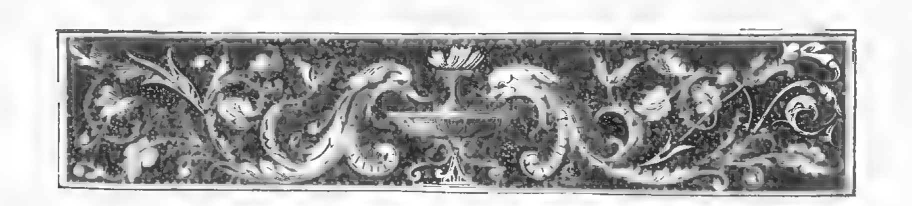
Вотъ почему въ дипломатическихъ сферахъ употребляются совершенно иные способы тайнописи—именно такъ называемая система *словарей.*

Словари для шифрованія бываютъ двухъ родовъ: численные и буквенные. Въ первомъ случаѣ каждая группа цифръ, во второмъ—группа буквъ обозначаютъ какое нибудь слово. Пользуясь такимъ словаремъ, отправитель пишетъ посланіе на этомъ условномъ языкѣ, а получатель, при помощи словаря же, переводитъ его снова на общеупотребительный языкъ.

Само собою разумѣется, что въ дипломатическомъ корпусѣ каждой страны есть свой словарь, который держится въ строжайшей тайнѣ и экземпляры котораго выдаются немногимъ, вполнѣ

надежнымъ и непосредственно заинтересованнымъ лицамъ. Случайная утрата словаря въ такихъ случаяхъ можетъ иногда повлечь за собой серьезныя послѣдствія, такъ какъ посланіе остается непрочитаннымъ. Разсказываютъ о подобномъ случаѣ изъ исторіи послѣдней русско-турецкой войны: помощникъ главнокомандующаго Мегметъ-Али, отлучившись, захватилъ съ собой по небрежности шифровальный словарь, въ его отсутствіе пришло на имя главнокомандующаго множество шифрованныхъ телеграммъ, которыя остались непрочитанными,—и въ результатѣ турки понесли изъ-за этого большой уронъ.





Счетныя машины.

Въ настоящемъ отдѣлѣ мы предполагаемъ ознакомить читателя съ одной изъ наиболѣе интересныхъ областей ариѳметики, а именно—съ исторіей и отчасти практикой счетныхъ машинъ. Думаемъ. что эта глава будетъ интересна для всѣхъ. Быть можетъ, для иныхъ она не останется даже безъ практической пользы. Счетныя машины совершенствуются съ каждымъ днемъ и все болѣе входятъ въ практику. Недалеко, пожалуй, то время, когда счетная машина завоюетъ въ культурномъ обиходѣ такое же мѣсто, какое уже завоевала пишущая машина.

Болѣе подробныя свѣдѣнія по исторіи вопроса желающій найдетъ въ классическомъ трудѣ Кантора «Исторія математики» и отчасти въ «Исторіи элементарной математики» Кэджори. Послѣдняя есть въ русскомъ переводѣ (изданіе «Mathesis»).

Обстоятельный очеркъ тому же вопросу посвящаетъ Э. Люка (Lucas) въ III-мъ томѣ своихъ знаменитыхъ «Récréations Mathématiques». См. также брошюру Л. А. Золотарева: «Какъ люди научились считать». Изд. 1910 года. Москва. — «Публичная лекція о *Цифраръ* діаграммометрѣ В. С. Козлова», читанная Эдуардомъ Люка въ 1890 году. (Переводъ съ франц. под. редакціей проф. А. В. Васильева. Казань. 1895.). Наконецъ, обращаемъ особенное вниманіе читателя на ученыя изслѣдованія по исторіи математики (въ древности и въ средніе вѣка) профессора Н. М. Бубнова. Изучая произведенія знаменитаго уче-

наго и дѣятеля среднихъ вѣковъ (X—XI вв. по Р. X.) Герберта, впослѣдствіи папы Сильвестра II († 1003 г.), проф. Бубновъ обратилъ особенное вниманіе на математическія сочиненія этого замѣчательнаго человѣка. Жупелъ математики не испугалъ филолога, а, наоборотъ, подвинулъ его къ энергичному труду овладѣть предметомъ. Результатомъ неустанной работы талантливаго ученаго, помимо полнаго и обстоятельно комментированнаго изданія математическихъ произведеній Герберта (на латинскомъ языкѣ, изданіе Фридлендера и сына въ Берлинѣ Gerberti Opera Mathematica, Berolini 1899, Rob. Friedländer und Sohn, pp. XIX + 620), явились русскія книги «Ариѳметическая самостоятельность европейской культуры» (Кіевъ, 1908, стр. X+408), «Происхожденіе и исторія нашихъ цифръ» (Кіевъ, 1908, стр. 196), «Абакъ и Боэцій» (Журн. Мин. Нар. Просв. 1907—1910 и отдѣльно Спб. 1912, стр. 311), «Подлинное сочиненіе Герберта объ абакѣ» (Кіевъ, 1911), «Древній абакъ — колыбель современной ариѳметики» (Кіевъ, вып. I, 1912) и др.

Нѣтъ сомнѣнія, что эти труды сыграютъ важную роль въ исторіи нашей науки — и прежде всего потому, что въ нихъ наглядно указано, какъ историкъ математики долженъ отнестись къ историческому документу или сочиненію, попавшему ему въ руки, прежде чѣмъ дѣлать изъ него какія-либо заключенія. Вслѣдъ затѣмъ выводы, къ которымъ приходитъ проф. Бубновъ въ результатѣ своихъ огромныхъ и часто кропотливыхъ изслѣдованій, проливаютъ новый свѣтъ на чрезвычайно важные и интересные вопросы, какъ-то: о такъ называемыхъ *абацистахъ* и *абакѣ* древняго міра, о происхожденіи и выработкѣ нашихъ цифръ, о состояніи элементарной ариѳметики въ средніе вѣка и, наконецъ, едва ли не самой важной и смѣлой (но обстоятельной) въ научномъ отношеніи является попытка проф. Бубнова возсоздать систему элементарной математики классической древности изъ отысканныхъ имъ же ея обломковъ среди средневѣковаго хлама [1]).

---

[1]) Отрывки изъ изслѣдованій проф. Бубнова читатель найдетъ въ нашей «Математической Хрестоматіи». Книга 1-я.

Счетъ и число.

Понятія о счетѣ и числѣ представляются на первый взглядъ столь элементарными, что едва ли кто затруднится отвѣтить утвердительно на вопросъ, знаетъ ли онъ, что такое число?

Однако дать точное опредѣленіе понятій о счетѣ и числѣ вовсе не такъ просто; ибо если число возникло въ результатѣ счета, то и сознательный, приведенный въ систему счетъ немыслимъ безъ яснаго представленія о безконечной измѣняемости чиселъ, и о числѣ, какъ о выраженіи конкретнаго множества. (См. по этому поводу «Въ Царствѣ Смекалки», книга 2-я, стр. 116, 148—155 и др.).

Разсужденія о томъ, когда именно возникли у людей представленія о числѣ, какъ о выраженіи множества, совершенно праздны. Есть наблюденія, показывающія, что и животныя не лишены нѣкоторой способности къ подсчету, а между тѣмъ не могутъ выразить результатъ его ни звукомъ, ни движеніемъ, ни начертаніемъ. Исключительные случаи, достигнутые дрессировкой, не могутъ считаться доказательными.

А разъ человѣкъ еще раньше полнаго обособленія отъ животнаго таилъ въ себѣ зачатки понятій о числѣ, онъ не можетъ, конечно, помнить о процессѣ ихъ возникновенія, какъ не помнитъ о своей утробной жизни.

Безусловно важны въ исторіи числа и счета лишь процессы, съ помощью которыхъ люди научились схватывать и удерживать въ памяти, выражать, передавать другимъ и развивать врожденныя имъ несложныя числовыя представленія.

Изслѣдованія въ области языкознанія, наблюденія надъ числовыми представленіями дикарей, пережитки въ языкахъ культурныхъ представителей человѣчества показываютъ, что «реализація числа», т. е. отвлеченіе отъ частныхъ случаевъ множества къ общимъ, обособленіе опредѣленнаго множества отъ неопредѣленнаго, началось съ сопоставленія самаго элементарнаго свойства: множественность выражалась описательно, реченіями и оборотами: «столько, сколько я да ты»; «столько, сколько у меня глазъ»; «столько, сколько у животнаго ногъ»; «столько, сколько у меня пальцевъ».

Дѣйствительно, даже у наиболѣе культурныхъ народовъ, числительныя: «два, deux, duo, two, zwei», въ несомнѣнномъ родствѣ съ «ты, tu, du, toi, thou»; «vier»—съ «Vieh» (скотина); «пять, пентъ, fifth, fünf, five» — съ «пясть, пята, пента, fist, Faust»: «zehn»—съ «Zehen» (пальцы на ногѣ); англійское «digits» (единицы счета) съ digiti» (пальцы).

Рамки примѣровъ можно бы значительно расширить использованіемъ всѣхъ языковъ, живыхъ и мертвыхъ. Всѣ они подтверждаютъ возникновеніе представленій о числѣ и самыхъ названій чиселъ именно такимъ конкретнымъ, а не умозрительнымъ путемъ.

Орудія счета. - Босоногая машина.

Части тѣла человѣка и животныхъ, явясь, такимъ образомъ, первоначальными критеріями множественности, косвенно легли впослѣдствіи въ основаніе системъ счисленія. Съ усложненіемъ быта и взаимоотношеній между представителями человѣчества, съ развитіемъ культуры и расширеніемъ торговыхъ сношеній, выраженіе «множества» при посредствѣ глазъ, ушей, конечностей и т. п., становилось все менѣе и менѣе удобнымъ, и, мало-помалу, первенствующая роль въ ряду простѣйшихъ орудій счета перешла къ пальцамъ. Пальцы же послужили образцомъ для нѣкоторыхъ примитивныхъ числовыхъ знаковъ, а счетъ на нихъ легъ въ основаніе всѣхъ, получившихъ сколько-нибудь широкую извѣстность и распространеніе, системъ счисленія.

Естественно, что рука, въ качествѣ элементарнѣйшаго счетнаго прибора, должна была повести къ счету пятками: пятокъ яблокъ, пятокъ куръ, пятокъ яицъ существуютъ до сихъ поръ какъ ходячія выраженія предметнаго счисленія. Такой «пятокъ», отсчитанный на пальцахъ одной руки, положимъ, правой, и отложенный на другой загибаніемъ одного пальца, являлся *первой единицей высшаго порядка.* По мѣрѣ нарастанія пятковъ получались отсчеты: «одинъ пятокъ и два» (т. е. 7); «два пятка и три» (т. е. 13); «три пятка и четыре» (т. е. 19); «четыре пятка и палецъ» (т. е. 21), и т. д. Пять пятковъ на лѣвой рукѣ давали вторую единицу высшаго порядка (т. е. 25),

которая отмѣчалась, положимъ, загибаніемъ мизинца лѣвой ноги. Всѣ пять пальцевъ лѣвой ноги составляли одну единицу третьяго порядка (т. е. 125), которая отмѣчалась однимъ изъ пальцевъ правой ноги, и т. д. Такимъ образомъ выраженіе «четыре пальца правой ноги, да два пальца лѣвой ноги, да три пальца лѣвой руки, да одинъ палецъ правой руки», значило бы на нашъ счетъ:

$$4 \cdot 125 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 1 = 566.$$

Судя по сохранившимся остаткамъ, такой счетъ нигдѣ не сложился въ прочную и законченную систему.

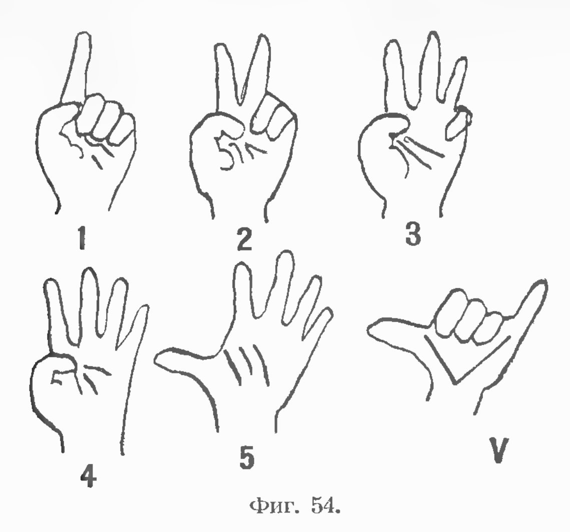
Родиной его слѣдуетъ считать Америку, гдѣ обрывки его въ ходу отъ крайняго сѣвера до крайняго юга. Изолировано онъ встрѣчается также у нѣкоторыхъ африканскихъ племенъ и у сибирскихъ инородцевъ.

Однако отсутствіе отдѣльныхъ названій для 25, 125, 625 и т. д. лишаютъ счетъ послѣдовательности. Для выраженія большихъ чиселъ приходится прибѣгать къ степенямъ чиселъ 10-ти и 20-ти.

Въ глубокой древности пятеричный счетъ принадлежалъ, вѣроятно, къ наиболѣе распространеннымъ: слѣды его находятся въ Гомеровскомъ діалектѣ Иліады и Одиссеи. Римскія цифры также носятъ явный отпечатокъ пятеричности. Такъ, отдѣльныя обозначенія существуютъ для единицы, для пяти, пятидесяти, пятисотъ, пяти и пятидесяти тысячъ. Самая цифра X представляетъ двѣ пятерки, сложенныя основаніями. Очертанія первыхъ пяти цифръ, несомнѣнно, получились изъ очертаній пальцевъ руки (фиг. 54). Пятеричныя цифры пережили пятеричный счетъ и наложили своеобразный оттѣнокъ на римскую нумерацію.

Конечно, счетъ пятками былъ счетомъ босоногаго человѣчества, съ подвижными пальцами ступни; потому онъ ранѣе другихъ частью забылся, частью усовершенствовался, давъ начало счету двадцатеричному. Съ другой же стороны, наиболѣе культурноспособныя человѣческія расы раньше другихъ стали обуваться и терять подвижность ножныхъ пальцевъ. Пока же всѣ ходили босикомъ, было совершенно естественно не оста-

навливаться на пятеричномъ счетѣ, а продолжать счисленіе на пальцахъ ногъ, вплоть до двадцати. Новая единица счета, т. е. «двадцатка» называлась, вѣроятно, либо «человѣкъ», либо



Фиг. 54.

«шкура», по числу пальцевыхъ отростковъ на шкурахъ пятипалыхъ животныхъ.

На позднѣйшее происхожденіе двадцатеричнаго счета указываетъ малое распространеніе его среди теперешнихъ дикарей, параллельно съ многочисленными пережитками въ языкахъ наиболѣе цивилизованныхъ народовъ.

Такъ до сихъ поръ во французскомъ языкѣ въ ходу числительныя quatre-vingts, quatre-vingts dix, six-vingts, quinze-vingts; англичане сплошь и рядомъ считаютъ на «scores of pounds» (двадцатки фунтовъ стерлинговъ); они же говорятъ «three score» (60), «three score and ten» (70), «four score» (80) вмѣсто sixty, seventy и eighty; въ живой датской рѣчи не только сохранились числительныя «tresindstyve» (3·20 = 60), «firesindstyve (4·20 = 80), но и болѣе сложныя выраженія, соотвѣтствующія древнерусскимъ «полтретьядвадцата», «полчетвертадвадцата», «полпятадвадцата», вмѣсто 50, 70 и 90.

Какъ отсчитывались на пальцахъ рукъ и ногъ высшія единицы двадцатеричной системы —т. е. «двадцатью-двадцать», «двадцатью-четыреста», «двадцатью-восемь тысячъ»—сказать до-

вольно трудно. Вѣрнѣе всего, что въ счетѣ участвовало нѣсколько человѣкъ, изъ которыхъ первый отсчитывалъ единицы, второй двадцатки, третій четырехсотки, четвертый восьмерки тысячъ и т. д., подобно тому, какъ поступаютъ современные полудикіе американскіе кочевники при десятичномъ счетѣ.

Отдѣльныя названія для высшихъ единицъ двадцатеричнаго счета сохранились въ памятникахъ доисторическихъ народовъ Центральной Америки. Такъ напримѣръ, у майевъ (Юкатанъ) существовали непроизводныя названія для 20, для 400 (20^2), для 8 000 (20^3) и для 160 000 (20^4); у ацтековъ—для 20, для 400 и для 8 000.

Такимъ образомъ майи съ помощью пальцевъ рукъ и ногъ могли отсчитывать до двадцати разъ по 160 000, т. е. до 3 200 000.

Этимъ, вѣроятно, и ограничивалась у нихъ потребность въ счетѣ, такъ какъ нѣтъ указаній, чтобы они считали дальше.

На языкѣ майевъ наши, напримѣръ, 7 095 выразились бы какъ семнадцать четырехсотокъ, четырнадцать двадцатокъ и пятнадцать единицъ.

Тамъ же, на предполагаемой родинѣ двадцатеричнаго счета, т. е. въ Америкѣ, гдѣ онъ достигъ наивысшаго развитія, естественная двуногая и двурукая босая человѣческая счетная машина была впервые дополнена механическими приспособленіями. Есть достовѣрныя историческія свидѣтельства, что перуанцами употреблялись для этой цѣли разноцвѣтные шкуры съ завязанными на нихъ узлами (квипосы).

Такими же механическими дополненіями къ человѣческому тѣлу надо считать общеевропейскія «бирки» и на нихъ «рѣзы».

Въ классической странѣ несообразностей, консервативно-прогрессивной Англіи, счетъ бирками и рѣзами, на «scores of pounds», просуществовалъ до конца семнадцатаго столѣтія при взиманіи государственныхъ налоговъ и повинностей. Одинъ «score» вмѣщалъ въ себѣ двадцать фунтовъ стерлинговъ, одинъ фунтъ стерлинговъ—двадцать шиллинговъ.

Сопоставленіе словъ «skin»—кожа, древне-англійскаго «core» — тѣло, и «score» — двадцать, невольно ассоціируется со «шкурой», въ смыслѣ двадцатипалой единицы. Бирки, на ко-

торыхъ рѣзами наносились «score of pounds» были оструганныя палки (tally, tallies). По заключеніи расчета, ихъ раскалывали пополамъ, и одна половина вручалась плательщику, другая сохранялась въ казначействѣ.

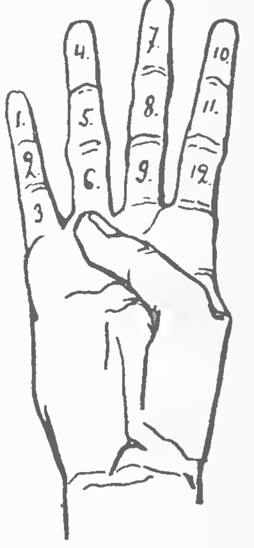
Такимъ образомъ, пережитки двадцатеричнаго счета, съ его примитивнѣйшими механическими приспособленіями, бирками и рѣзами, еще въ семнадцатомъ столѣтіи напоминали человѣку, что было время, когда онъ самъ, своей особой, игралъ роль босоногой счетной машины.

Орудія счета. – Обутая машина.

Когда культурные представители человѣчества обулись и одѣлись въ долгополыя одежды, ноги перестали служить имъ орудіями счета. Остались только руки съ десятью пальцами и тремя суставами на каждомъ, за исключеніемъ большихъ.

Очень вѣроятно, что, только достигнувъ извѣстнаго культурнаго уровня, человѣкъ замѣтилъ, какое удобное счетное приспособленіе представляютъ суставы пальцевъ. Иначе двѣнадцатеричная система опередила бы десятичную, и, какъ болѣе удобная, не уступила бы ей первенства.

Отсчетъ ногтемъ большого пальца правой руки суставовъ остальныхъ четырехъ пальцевъ, давалъ основаніе двѣнадцать, или дюжину (фиг. 55).



Фиг. 55.

Аналогичное отсчитываніе дюжинъ на суставахъ пальцевъ лѣвой руки дало дюжину дюжинъ, или «гроссъ». Дальнѣйшаго развитія система, повидимому, не получила. Интересна она своей живучестью, а также тѣмъ, что легла въ основаніе шестидесятичной системы, употреблявшейся въ Вавилонѣ.

Ключъ къ послѣдней былъ найденъ на двухъ плиткахъ изъ

обожженной глины, открытыхъ во время раскопокъ въ древнемъ Вавилонѣ. Первая содержала равенства вида:

$$1.4 = 8^2, \quad 1.21 = 9^2; \quad 1.40 = 10^2; \quad 2.1 = 11^2 \text{ и др.}$$

На второй находились числовыя коэффиціенты освѣщенной части луннаго диска, въ 240-хъ доляхъ луннаго діаметра, въ періодъ отъ новолунія до полнолунія, выраженная въ такой формѣ:

5, 10, 20, 40, 1.20, 1.36, 1.52, 2.8 и т. д.,

при чемъ всѣмъ числамъ меньшимъ шестидесяти соотвѣтствовали самостоятельные знаки. Формулы эти понятны и возможны лишь при условіи, что каждая единица влѣво, отдѣленная отъ предыдушей точкой, равна шестидесяти. Тогда дѣйствительно:

$$1.4 = 60 + 4 = 8^2; \quad 1.21 = 60 + 21 = 81 = 9^2$$
$$1.40 = 60 + 40 = 10^2; \quad 2.1 = 120 + 1 = 11^2$$
$$1.20 = 60 + 20 = 80; \quad 1.52 = 60 + 52 = 112$$
$$2.8 = 2 \cdot 60 + 8 = 120 + 8 = 128.$$

Шестьдесятъ называлось на языкѣ вавилонянъ «соссъ»; а шестьдесятъ соссовъ, или 3 600, называлось «саръ». Такимъ образомъ число 192 924 читалось и писалось у нихъ какъ «53 саръ 35 соссъ 24 единицы».

По мнѣнію Кантора и Кэджори, вавилонскій способъ численія «не могъ находиться въ связи съ устройствомъ человѣческаго тѣла».

Ошибка обоихъ кроется въ томъ, что ни одинъ изъ нихъ, повидимому, не наблюдалъ, какъ дѣйствуетъ счетная машина человѣческаго тѣла въ тѣхъ мѣстностяхъ земного шара, въ которыхъ по сю пору уцѣлѣли остатки шестидесятичнаго счета: мы говоримъ о широкой полосѣ на границѣ германскаго и славянскаго міровъ, захватывающей часть нашихъ сѣверо-западныхъ, западныхъ и юго-западныхъ губерній, отъ Кіева на югѣ и на сѣверѣ до Риги, и простирающейся на западъ черезъ Галицію, Саксонію, Бранденбургъ и Померанію до Данцига. Въ этой полосѣ, вдалекѣ отъ главныхъ центровъ, счетъ продолжается на *копы* (60 штукъ), «полукопы» (30 штукъ) и «мандели»

(15 штукъ). А лѣтъ 30—40 тому назадъ даже въ такомъ торгово-культурномъ центрѣ, какъ Рига, яйца и раки продавались на рынкахъ не иначе, какъ на мандели и копы (Schock).

Механизмъ счета былъ чрезвычайно простъ; загибая пальцы лѣвой руки, и продавцы и покупатели отсчитывали пятки; каждый пятокъ отмѣчался ногтемъ большого пальца правой руки на суставахъ остальныхъ четырехъ пальцевъ, начиная съ мизинца.

Мизинецъ давалъ первый мандель копы: безымянный—второй; средней—третій и указательный—четвертый. Самое нѣмецкое слово «Schock» звучитъ нѣсколько похоже на «зоссъ» и могло быть занесено съ Востока во время великаго переселенія народовъ. Этимологія и происхожденіе слова «Mandel» неизвѣстны. Русская «копа» одного корня съ «совокупность», «накопленіе», «копить».

Живая счетная машина человѣка дала начало и еще одной системѣ счисленія, весьма рѣдкой, отъ которой остались лишь жалкіе обрывки.

«Сорокъ сороковъ церквей» въ Бѣлокаменной, да уплата ясака «сороками соболей» инородческимъ населеніемъ Сибири, сорокъ фунтовъ въ пудѣ суть единственные пережитки нѣкогда весьма распространеннаго счета.

Начатки его опять-таки въ пальцахъ и рукѣ.

Грубая, заскорузлая, коротконалая рука сибирскаго звѣролова и кочевника не годилась для счета дюжинами, потому что укороченный большой палецъ, и то съ трудомъ, нащупывалъ на остальныхъ по два сустава вмѣсто трехъ. Цѣлая рука давала такимъ образомъ восемъ единицъ (фиг. 56), а пять пальцевъ другой руки позволяли отсчитать пять восьмерокъ, или сорокъ.



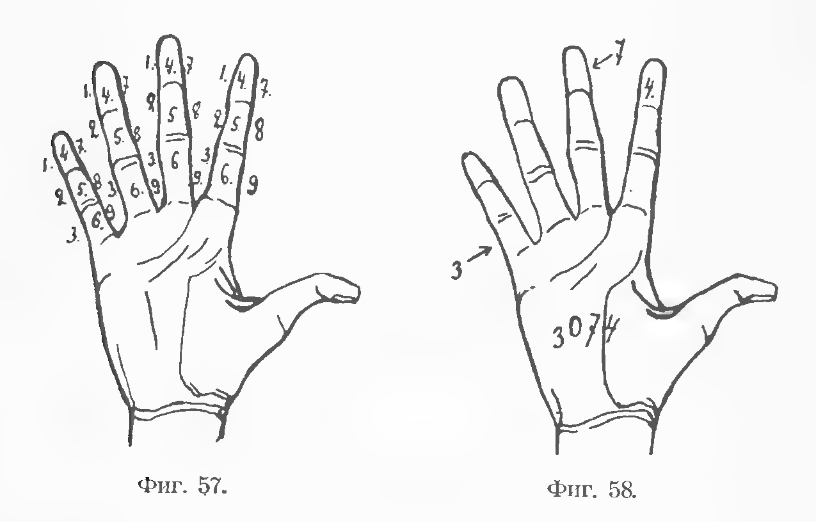
Фиг. 56.

Для «сорока сороковъ» требовалось, конечно, двое счетчиковъ.

Наивысшаго расцвѣта счетъ на пальцахъ достигъ въ Китаѣ уже въ періодъ полнаго торжества десятичной системы счисленія.

Холеная, гибкая рука, съ длинными пальцами и ногтями, культурнаго китайца позволяла нащупывать на каждомъ суставѣ по три мышечныя утолщенія: два боковыхъ и среднее, итого на цѣломъ пальцѣ девять. Девять утолщеній, соотвѣтственно девяти цифрамъ, восемь разрядовъ, соотвѣтственно восьми трехсуставнымъ пальцамъ, позволяли отмѣчать прикосновеніемъ ногтя большого пальца всѣ числа отъ 1 и до 99 999 999 (фиг. 57).

Путешественники удостовѣряютъ, будто китайцы съ большимъ умѣньемъ сообщаютъ другъ другу съ помощью пальцевъ



Фиг. 57. Фиг. 58.

биржевыя цѣны и коммерческія тайны. Они торгуются и совершаютъ сдѣлки молча на глазахъ многочисленныхъ свидѣтелей, спрятавъ руки подъ полами длинныхъ одѣяній.

Въ прежнія времена русскіе купцы также при сдѣлкахъ ударяли рука объ руку подъ полой кафтановъ. Обычай этотъ былъ перенятъ, вѣроятно, у китайцевъ, но съ утратой его внутренняго, практическаго смысла.

На фиг. 58-й соотвѣтствующими цифрами обозначено, какимъ порядкомъ прикосновеній могло бы быть отмѣчено и прочитано на одной рукѣ число 3 074.

Нашествіе обутыхъ варваровъ и торжество десятичной системы счета.

Расцвѣтъ двѣнадцатеричной и шестидесятеричной системъ счисленія предполагается около 2000 л. до Р. Х. въ халдейскомъ Урѣ. Предѣлъ дальнѣйшему его развитію и распространенію былъ положенъ разрушеніемъ Урской и Ассиро-Вавилонской цивилизацій.

Потокъ народовъ, стершій съ лица земли древнѣйшія культурныя царства, стоялъ на перепутьи отъ варварства къ культурѣ. Покорители Халдейскаго Востока сравнительно недавно обулись и перешли отъ пятеричнаго или двадцатеричнаго счета къ десятичному.

Кто они были—въ точности неизвѣстно. Но ихъ было много, и они были побѣдителями.

Послѣ временнаго пониженія уровня культуры наступилъ снова подъемъ умственной жизни и явились новые запросы духа. Тогда извѣстная живая счетная машина человѣческаго тѣла вскорѣ оказалась недостаточной. Невозможность производить на пальцахъ сложныя выкладки заставила искать вспомогательныхъ средствъ — сначала только для облегченія памяти, а потомъ и для выполненія операцій съ числами.

Счетныя пособія—графическія и предметныя.

Выше мы уже говорили о биркахъ и узлахъ, какъ о средствахъ облегчить память, а также закрѣпить и сообщить другимъ результаты счета. Но ранѣе, чѣмъ бирки и узлы сдѣлались общимъ достояніемъ и счетными пособіями, искусство счета прошло черезъ болѣе элементарныя фазы. Такъ, несомнѣнно, что замѣна ограниченнаго числа пальцевъ камешками, раковинами, зернами предшествовала узламъ и биркамъ. Кучки однороднымъ подвижныхъ предметовъ облегчали счетъ и позволяли ощупью производить четыре основныхъ дѣйствія надъ числами не исключительно въ умѣ.

Результаты стали изображать условными знаками, число которыхъ первоначально было очень велико. Потребовалось

много вѣковъ, пока люди убѣдились, что при десятичной системѣ счисленія достаточно десяти знаковъ для выраженія любыхъ чиселъ.

Условные знаки писались на пескѣ, на глинѣ, или иной пластичной массѣ, отмѣчались узлами, бирками, нестираемыми надписями. Камешковъ, раковинъ, зеренъ бралось первоначально столько, сколько было объектовъ счета и лишь впослѣдствіи стали приписывать имъ помѣстное значеніе, въ зависимости отъ взаимнаго ихъ положенія.

Ни исторія, ни преданіе не сохранили именъ тѣхъ, которые стали считать камешекъ или раковину, положенные лѣвѣе или правѣе, въ нѣсколько разъ больше или меньше своихъ ближайшихъ сосѣда или сосѣдки. Вѣроятнѣе всего, что такимъ изобрѣтателемъ явилось все человѣчество, додумавшееся сообща до счета: по пальцамъ, на пятки, десятки, дюжины, двадцатки, сорока и копы, приглашавшее отдѣльныхъ счетчиковъ для единицъ, отдѣльныхъ для десятковъ, отдѣльныхъ для сотенъ; приписывавшее пальцамъ на ногахъ числовое значеніе въ 25 и въ 125 разъ больше, чѣмъ пальцамъ на рукахъ.

Отсюда уже одинъ шагъ къ графическому изображенію полосками, клѣтками или кружками полей, для помѣщенія въ нихъ предметовъ, или знаковъ, имѣющихъ помѣстно-возростающее или убывающее значеніе. Но человѣческій умъ затратилъ много времени прежде, чѣмъ додумался до этого шага.

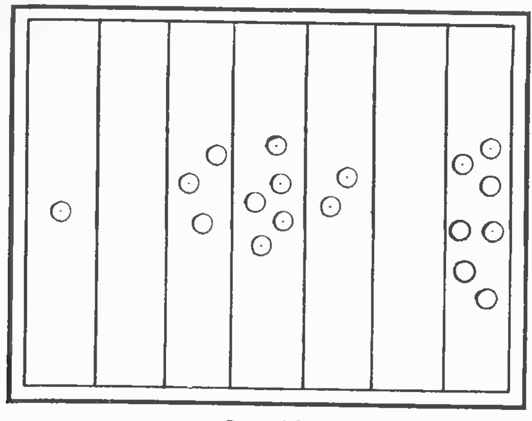
Первый намекъ на такое счетное приспособленіе находимъ у Геродота. Онъ пишетъ:

«Египтяне считаютъ камешками, водя рукой справа налѣво, между тѣмъ какъ эллины водятъ рукой слѣва направо».

Въ чемъ состоялъ египетскій «счетъ камешками», достовѣрно неизвѣстно. Одно несомнѣнно, что столбцы, графы, клѣтки или поля, на которые клались камешки, были расположены въ горизонтальной послѣдовательности, иначе приходилось бы водить рукой снизу вверхъ, или сверху внизъ, а не справа налѣво (или наоборотъ). Значитъ столбцы, или графы, по отношенію къ считавшему, были вертикальные.

Изъ послѣдующихъ формъ, которыя принялъ счетъ въ Греціи, въ Римѣ и далѣе на западъ, можно лишь догадаться, что

у современныхъ Геродоту грековъ значеніе камешковъ возрастало справа налѣво, у египтянъ же наоборотъ. Такъ, на прилагаемой фиг. 59-ой сочетаніе камешковъ въ графикахъ означало бы въ греческомъ чтеніи 1 035 207, а въ египетскомъ 7 025 301.



Фиг. 59.

Правильность такой догадки подтверждается всей дальнѣйшей исторіей развитія искусства счета въ древніе и средніе вѣка. Ибо только изъ такихъ, какъ выше, графиковъ, могла возникнуть основная идея счетной машины древности, такъ называемаго «абака» [1]).

Абакъ и римскіе счеты.

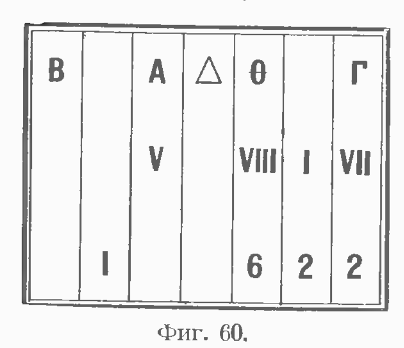
Названіе «абакъ», по мнѣнію нѣкоторыхъ, стоитъ въ связи съ семитическимъ корнемъ «бакъ», что значитъ «прахъ», въ смыслѣ «пыль» или «песокъ». Другіе же видятъ въ немъ коренное греческое слово «abax»—столъ.

Словопроизводство отъ «бакъ—прахъ» неправдоподобно, хотя иные и доказываютъ, что въ первичной формѣ абакъ представлялъ собою доску, покрытую тонкимъ слоемъ пыли или песка, на которомъ чертили числовые знаки, буквы или геометрическія фигуры, и что въ такомъ видѣ абакъ сохранился до послѣднихъ

[1]) Абакъ, греческое «абаксъ»; въ латинской транскрипціи «abacus».

временъ древней культуры, въ качествѣ пособія при изученіи геометріи. Песокъ употреблялся синій, крашеный или естественный; вѣрнѣе—мелкорастертая голубая глина, ложащаяся довольно плотнымъ, не легко сдуваемымъ слоемъ.

Въ школахъ абакъ исполнялъ роль грифельной доски, на которой писались, и вновь стирались, числовые знаки и геометрическія фигуры. На фиг. 60 представлены написанныя на абакѣ числа; греческимъ шрифтомъ 2014 903; латинскимъ — 50 817 и арабскимъ — 100 622.



Фиг. 60.

Вѣрнѣе всего то, что для практическихъ цѣлей счетоводства, абакъ очень рано принялъ видъ разграфленной доски, на которой считали камешками, а впослѣдствіи марками или жетонами. Графы вначалѣ не имѣли наименованій, такъ что одинъ и тотъ же абакъ могъ служить и для денежныхъ расчетовъ, и для мѣръ длины, емкости и вѣса. Помѣстныя значенія камешковъ или жетоновъ мѣнялись въ зависимости отъ существовавшихъ отношеній между послѣдовательными единицами вѣса, цѣнности и мѣры. Извѣстному греческому мудрецу Солону приписывается изреченіе, что «человѣкъ, который дружитъ съ тиранами, подобенъ камешку при вычисленіи, значеніе котораго бываетъ иногда большое, а иногда малое». А у историка Полибія находимъ упоминаніе о маркахъ на абакѣ, которыя «обозначаютъ, по желанію считающаго, то таланты, то халкосы».

Встрѣчались и такіе абаки, которые были приспособлены исключительно для денежныхъ расчетовъ.

Такъ, въ 1846 году, при раскопкахъ на Саламинѣ, былъ найденъ мраморный абакъ огромныхъ размѣровъ—до 2 арш. 2 верш. въ длину, при аршинѣ въ ширину — одинаково приспособленный для счета и на вавилонскіе и на аттическіе таланты. Онъ имѣлъ пять главныхъ столбцовъ и четыре дополнительныхъ. Главные столбцы предназначались, при счетѣ на вавилонскіе таланты, для талантовъ, тысячъ, сотенъ, десятковъ

и единицъ драхмъ [1]); при счетѣ на аттическіе таланты—для талантовъ, десятковъ минъ, единицъ минъ, десятковъ драхмъ и единицъ драхмъ [2]). На дополнительныхъ столбцахъ откладывались половины, трети и шестыя доли драхмы, или оболы [3]); на послѣднемъ—халкосы [4]).

Ближе къ верхнему краю, черезъ всѣ столбцы, проходила поперечная черта, о значеніи которой поговоримъ ниже.

Вѣрнѣе всего, что найденный абакъ употреблялся для расчетовъ въ большой мѣняльной лавкѣ, или служилъ въ притонѣ для азартныхъ игръ. Въ послѣднемъ случаѣ на столбцы могли ставиться и не жетоны, а звонкая монета, или же метаться кости, по мѣсту паденія которыхъ на тѣ или иные столбцы опредѣлялись размѣры выигрыша или проигрыша.

Жетоны или марки назывались у грековъ «псефы» (псефой), т. е. «камешки»; римляне, заимствовавъ абакъ, стали называть ихъ «calculi», т. е. «счетчики». Марки эти вначалѣ были безписьменные, гладкіе.

Вслѣдъ затѣмъ появляются жетоны *мѣчсные*, т. е. съ обозначеніями первыхъ десяти знаковъ или чиселъ, греческимъ или римскимъ письмомъ. Изобрѣтеніе ихъ приписывается новопиѳагорейцамъ, почему и самый абакъ съ числовыми жетонами сталъ называться у римлянъ «mensa pythagoreana», т. е. «пиѳагоровъ столъ». Эти «пиѳагоровы столы» не пользовались вначалѣ особеннымъ распространеніемъ, вслѣдствіе мѣшкотности процесса при переходѣ отъ числа, написаннаго римскими цифрами, къ изображенію его на абакѣ и обратно.

Такъ, напр., число 2 973 римскими цифрами писалось такъ:

MMDCCCCLXXIII

Для перевода на языкъ столбцовъ его требовалось предварительно расчленить, что, примѣнительно къ теперешнему знакоположенію, могло бы быть изображено какъ

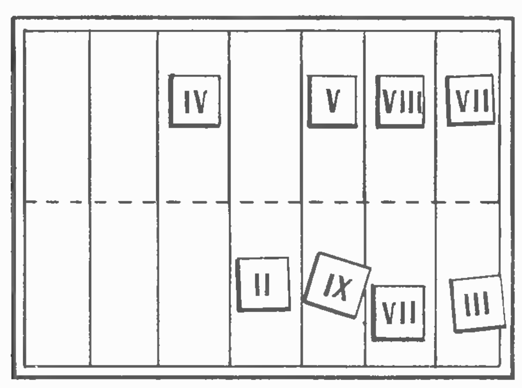
MM + DCCCC + LXX + III

[1]) Вавилонскій талантъ равнялся 10 000 драхмъ.
[2]) Аттическій талантъ составлялъ 60 минъ; мина—100 драхмъ.
[3]) Драхма = 6 оболамъ.
[4]) Оболъ = 8 халкосамъ.

Послѣ того, написанное жетонами на столбцахъ абака, или пиѳагорова стола, оно представилось бы какъ на фиг. 61-ой (внизу).

На томъ же рисункѣ, сверху, отдѣленное отъ нижняго пунктиромъ, изображено жетонами число

$$40\,587 = \overline{\text{XL}}\,\text{DLXXXVII}$$



Фиг. 61.

Интересною разновидностью пиѳагорова стола былъ абакъ съ отверстіями и колышками (или втулками). Въ каждомъ столбцѣ имѣлось по десяти отверстій, съ нумераціею слѣва; въ отверстія вставлялись втулки. Образца подобнаго абака не сохранилось и рисунокъ 62-й возстановленъ по описанію. Число, отложенное на немъ колышками или втулками, очевидно 86 704, или, по римскому написанію, $\overline{\text{LXXXVI}}$ DCCIV.

Несомнѣнно, что десятыя отверстія въ каждомъ изъ столбцовъ, при изображеніи чиселъ, являлись лишними; но они могли сослужить хорошую службу при сложеніи и вычитаніи, выполнявшихся на абакахъ съ жетонами и колышками такъ же, какъ на нашихъ счетахъ.

Что касается умноженія и дѣленія, то о пріемахъ ихъ выполненія у древнихъ ничего достовѣрнаго неизвѣстно, такъ какъ у математиковъ даются одни лишь результаты безъ указанія способовъ ихъ полученія.

Что древніе не только множили и дѣлили, но и извлекали корни на своихъ абакахъ, не отступая передъ дробями, яв-

ствуетъ изъ сохранившихся сборниковъ задачъ и ихъ рѣшеній. Пріемы были, по мнѣнію иныхъ, чрезвычайно длительные, требовавшіе большого напряженія памяти. Едва ли обходились безъ одновременнаго пользованія двумя абаками, однимъ съ жетонами или колышками, для закрѣпленія результатовъ, другимъ песочнымъ, для выкладокъ по ходу дѣйствія. Дроби

Сот. тыс. Дес. т. Тыс. Сот. Дес. Ед.

C̄ X̄ M C X I

X IX VIII VII VI V IV III II I

Фиг. 62.

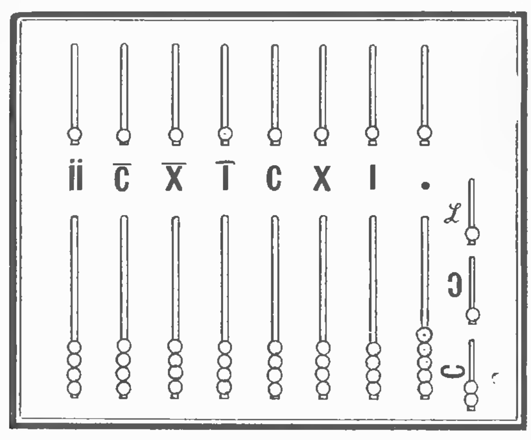
употреблялись двѣнадцатеричныя и шестидесятеричныя [1]), вполнѣ отвѣчавшія конкретнымъ случаямъ подраздѣленія денежныхъ, вѣсовыхъ и прочихъ единицъ у древнихъ.

Послѣднимъ словомъ римской техники по устройству счетныхъ приборовъ былъ, повидимому, абакъ, хранящійся въ музеѣ древностей въ Неаполѣ.

---

[1]) Т. е. со знаменателями, кратными 12 или 60.

Онъ представляетъ металлическую доску съ прорѣзами, или пазами, вдоль которыхъ ходятъ пуговки. Прорѣзовъ восемь длинныхъ и одиннадцать короткихъ, изъ которыхъ восемь составляютъ какъ бы продолженіе длинныхъ, а три расположены дополнительно, по одной линіи (фиг. 63).



Фиг. 63.

Во всѣхъ короткихъ прорѣзахъ по одной пуговкѣ, за исключеніемъ самаго нижняго, въ которомъ ихъ двѣ. Длинные прорѣзы имѣютъ по четыре пуговки, а крайній правый пять; надъ нимъ точка; а надъ прочими, въ послѣдовательномъ порядкѣ, справа влѣво, римскія цифры для обозначенія единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д. Боковые прорѣзы снабжены условными знаками для половины (*L*), четверти (Ɔ) и шестой (ᑌ).

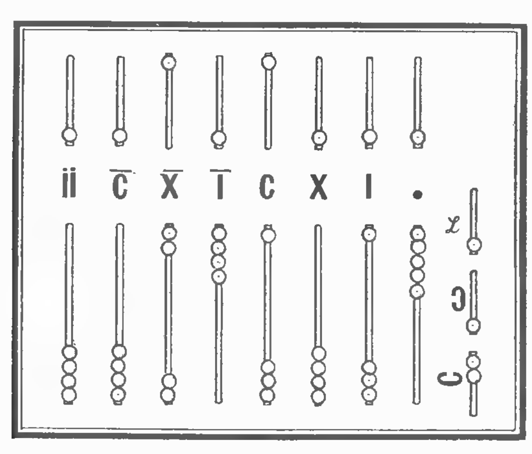
Значеніе каждой верхней пуговки въ пять разъ болѣе помѣстнаго значенія соотвѣтствующей нижней—за исключеніемъ послѣдней пары столбцовъ, обозначенныхъ точкой, для которыхъ верхняя пуговка имѣетъ значеніе въ шесть разъ больше каждой изъ нижнихъ. Прорѣзъ съ точкой давалъ возможность отсчитывать двѣнадцатыя доли единицы, а короткіе прорѣзы сбоку—половины, четверти и шестыя двѣнадцатыхъ долей.

Устройство неаполитанскаго абака уясняетъ, между прочимъ, назначеніе поперечной черты абака, найденнаго при раскопкахъ въ Саламинѣ: надъ нею ставились на поля столбцовъ жетоны, имѣвшіе значеніе тождественное, по смыслу, съ верх-

ними пуговками неаполитанскаго абака. Этимъ достигалось сокращеніе числа жетоновъ, облегчалась память, но за то страдала наглядность и ясность хода вычисленій. При игрѣ же въ кости поперечная черта давала одинъ лишній шансъ азарта.

Итакъ, фактически римскій абакъ съ прорѣзами и пуговками былъ ничѣмъ инымъ какъ *счетами*. Онъ могъ служить для *вѣсовыхъ* единицъ: фунтовъ, унцій ($^1/_{12}$ фунта), семунцій ($^1/_{24}$ ф.), силиціевъ ($^1/_{48}$ ф.) и секстулъ ($^1/_{72}$ ф.); *денежныхъ*: ассовъ и унцій, и *отвлеченныхъ*—съ подраздѣленіями на двѣнадцатыя, двадцать четвертыя, сорокъ восьмыя и семьдесятъ вторыя доли.

Приспособленность этихъ римскихъ счетовъ къ потребностямъ повседневнаго жизненнаго обихода въ древнемъ Римѣ заслуживаетъ полнаго вниманія. Простою перемѣною условнаго значенія пуговокъ на короткихъ дополнительныхъ столбцахъ приборъ въ одинаковой мѣрѣ могъ быть пригоденъ и для единицъ площади, и для жидкихъ, и для сыпучихъ тѣлъ.



Фиг. 64.

На фиг. 63 онъ изображенъ съ пуговками въ положеніи покоя, т. е. до начала счетныхъ операцій. На фиг. 64 отложено число

$$74\,601 + \frac{5}{12} + \frac{2}{72} = 74\,601\,\frac{4}{9}$$

Сложеніе и вычитаніе производились на приборѣ легко быстро; имъ обучали въ римскихъ школахъ, какъ у насъ преподается счисленіе на счетахъ.

Умноженіе представлялось уже гораздо болѣе затруднительнымъ; и едва ли было удобовыполнимо безъ вспомогательной доски, главнымъ образомъ вслѣдствіе неуклюжаго изображенія чиселъ помощью громоздкихъ римскихъ цифръ. Простой, на нашъ взглядъ, случай умноженія $105^1{}_2$ на $24^5/_{12}$ требовалъ ряда очень сложныхъ выкладокъ, изобразимыхъ такою послѣдовательностью формулъ:

$$105\frac{1}{2}\cdot 24\frac{5}{12}=(100+5+\frac{1}{2})\ (20+4+\frac{1}{3}+\frac{1}{12})=$$

$$=100\cdot 20+5\cdot 20+10+100\cdot 4+5\cdot 4+2+100\cdot\frac{1}{3}+$$

$$+5\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+100\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12};$$

$$100\cdot 20+5\cdot 20+10+100\cdot 4+5\cdot 4+2=2\,532;$$

$$\left.\begin{aligned}100\cdot\frac{1}{3}&=33+\frac{4}{12}\\ 5\cdot\frac{1}{3}&=\ 1+\frac{8}{12}\\ 100\cdot\frac{1}{12}&=8+\frac{4}{12}\end{aligned}\right\}=43+\frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{12}+\frac{1}{24}=\frac{7}{12}+\frac{1}{24}$$

$$43+\frac{4}{12}+\frac{7}{12}+\frac{1}{24}=43+\frac{11}{12}+\frac{1}{24}$$

$$2532+43+\frac{11}{12}+\frac{1}{24}=2575+\frac{11}{12}+\frac{1}{24}$$

Какъ промежуточные, такъ и окончательный результатъ вполнѣ укладываются въ рамки удобопредставляемыхъ на римскихъ счетахъ чиселъ.

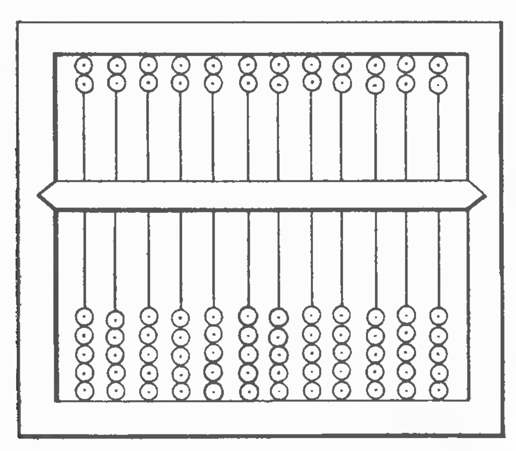
Какъ поступали въ случаѣ дробей, неудобоприводимыхъ къ двѣнадцатичнымъ или шестидесятичнымъ, сказать довольно трудно. Вѣрнѣе всего, что прибѣгали къ упрощеніямъ не всегда безупречнаго, съ нашей точки зрѣнія, характера.

Китайскій суанъ-панъ и русскіе счеты.

Весьма интересной, съ точки зрѣнія историческихъ «совпаденій», является почти полная тождественность абака вышеописаннаго типа (т. е. римскихъ счетовъ) съ китайскимъ суанъпаномъ, однимъ изъ древнѣйшихъ счетныхъ приспособленій, происхожденіе котораго неизвѣстно.

Римскій абакъ почти до мелочей повторилъ китайское изобрѣтеніе, въ условіяхъ, повидимому, исключающихъ заимствованіе или переносъ.

Суанъ-панъ представляетъ рамку, какъ у нашихъ счетовъ, раздѣленную продольной перекладиной на двѣ неравныя части.



Фиг. 65.

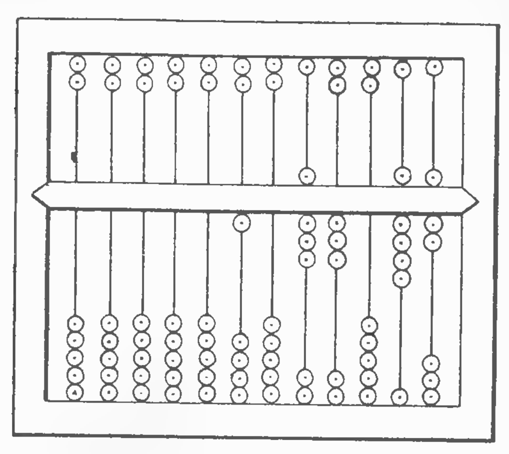
Сквозь перекладину и продольныя рейки рамы продѣты отъ 9 до 15 жесткихъ прутьевъ или проволокъ съ шариками или костяшками, какъ на русскихъ счетахъ.

Въ верхнемъ отсѣкѣ шариковъ по два, въ нижнемъ по пяти на каждой проволокѣ. Такимъ образомъ, костяшки даютъ возможность отсчитывать единицы и пятки послѣдовательныхъ разрядовъ. На каждую единицу высшаго разряда приходится по

два пятка, или по десяти единицъ низшаго разряда. До начала счета костяшки отодвигаются къ внѣшнимъ краямъ рамы, какъ на фиг. 65.

Для приданія костяшкамъ числовыхъ значеній, ихъ сдвигаютъ, въ томъ или иномъ порядкѣ, къ средней поперечинѣ.

На фиг. 66-й отложено на суанъ-панѣ число 1 083 097.



Фиг. 66.

Главное отличіе суанъ-пана не въ прутьяхъ, вмѣсто пазовъ, и не въ отсутствіи укороченныхъ разрядовъ для изображенія дробей, а въ лишнихъ шарикахъ: римляне надѣли бы на короткія проволоки по одному, на длинныя по четыре шарика. Конечно, соотвѣтственно четырехъ и одного шарика было бы достаточно для изображенія на суанъ-панѣ всевозможныхъ чиселъ, но при выполненіи дѣйствій не хватало бы по одному шарику на длинныхъ прутьяхъ для полнаго раздробленія единицъ высшихъ разрядовъ въ низшія.

Въ нѣкоторыхъ математическихъ сборникахъ встрѣчается анекдотъ о суанъ-панѣ, касающійся лишнихъ шариковъ, имѣющій, однако, несомнѣнно европейское, а не китайское происхожденіе.

Миѳическій изобрѣтатель суанъ-пана послалъ, будто, другу своему модель прибора съ золотыми шариками на серебряныхъ проволокахъ, предлагая угадать. въ чемъ дѣло. Другъ, въ доказательство своей понятливости, снялъ съ каждой проволоки по

шарику, а серебряные прутья замѣнилъ стальными, обративъ такимъ образомъ суанъ-панъ въ подобіе римскихъ счетовъ.

Анекдотъ имѣетъ фактическую подкладку въ проектахъ усовершенствованія русскихъ счетовъ, возникавшихъ въ умахъ нѣкоторыхъ западныхъ ученыхъ, смѣшивавшихъ русскіе счеты съ суанъ-паномъ. Въ дѣйствительности же русскіе счеты построены по образцу древнѣйшихъ абаковъ съ камешками или гладкими жетонами.

Такъ, если на столбцахъ того примитивнаго абака, который изображенъ на фиг. 59, въ верхней или нижней части ихъ постоянно держать на-готовѣ по десятку камешковъ, шариковъ или костяшекъ, вмѣсто того, чтобы, по мѣрѣ надобности, брать изъ общей кучи; затѣмъ, чтобы костяшки не терялись, нанизать ихъ на шнурокъ или на проволоку, то получатся типичнѣйшіе русскіе счеты.

Всѣ поползновенія къ усовершенствованію русскихъ счетовъ сводились къ удаленію по одной лишней костяшкѣ съ каждой проволоки. Усовершенствованія не привились по той простой причинѣ, что счеты предназначены вовсе не для изощренія сообразительности, а для облегченія механизма вычисленій, наглядность которыхъ значительно теряла при неполномъ числѣ шариковъ.

Изъ всѣхъ простѣйшихъ числительныхъ приборовъ русскіе счеты единственный, удержавшійся до нашихъ дней, благодаря чрезвычайной незатѣйливости своего устройства, приспособленности къ десятичной системѣ счисленія, а также осязательности и наглядности счетныхъ операцій.

Апексы Боэція. Захуданіе абака.

Римскій абакъ съ пуговками (римскіе счеты) имѣлъ одну особенность, свидѣтельствовавшую о постепенномъ укрѣпленіи въ сознаніи грамотныхъ людей важности помѣстнаго значенія числовыхъ символовъ. Такъ, въ обозначеніяхъ I, X, C, $\overline{\text{I}}$, $\overline{\text{X}}$, $\overline{\text{C}}$, $\overline{\overline{\text{I}}}$, $\overline{\overline{\text{X}}}$ и т. д., совершенно недвусмысленно выражены классы единицъ, тысячъ и милліоновъ [1]). Хотя аналогичный (но не тожде-

[1]) Слово «милліонъ» или «большая тысяча» впервые вошло въ употребленіе въ XIV вѣкѣ. Итальянскаго происхожденія.

ственный) принципъ раздѣленія былъ установленъ еще Архимедомъ, въ его задачѣ о «псаммитѣ» (См. стр. 7-ю настоящей книги).

Потребовалось нѣсколько столѣтій работы на абакѣ, пока наконецъ, на зарѣ среднихъ вѣковъ, послѣдній римскій математикъ изъ школы древнихъ геометровъ, Боэцій (умеръ въ 524 г. по Р. Х.), а по болѣе обоснованному мнѣнію проф. Бубнова нѣкто, выдавшій себя за Боэція (Лжебоэцій), въ своемъ сочиненіи «De institutione Arithmetica», не предложилъ пользоваться, для вычисленій на абакѣ, только *девятью* знаками, которые онъ назвалъ apices (apex, icis), по-русски «апексы».

Самые апексы были шашечки или боченочки, въ родѣ употребляющихся при игрѣ въ лото, а начертанія на нихъ, заимствованныя изъ Индіи, долгимъ путемъ перекочевокъ и случайныхъ передѣлокъ явились родоначальниками нашихъ цифръ.

Что касается названія этихъ цифръ «арабскими», то вопросъ о ихъ происхожденіи довольно-таки запутанъ массой матеріала легендарнаго характера. Во всякомъ случаѣ, современныя ихъ формы выработались продолжительнымъ взаимодѣйствіемъ культуръ греко-римской и восточной, чему имѣются весьма вѣскія свидѣтельства. Укрѣпилось же за цифрами названіе «арабскихъ» потому, что въ апексахъ Боэція нѣтъ знака, соотвѣтствующаго нулю; нуль же дѣйствительно заимствованъ у арабовъ, вмѣстѣ съ названіемъ его «сифръ», что по-арабски значитъ «пустой».

Отсюда и латинское «zephirum» и французское «zéro» и англійское «cipher» въ смыслѣ *нуль*; а равно и общеевропейское «цифра» въ различныхъ произношеніяхъ и измѣненіяхъ, въ смыслѣ любого изъ десяти числовыхъ знаковъ.

Исторія превращенія апексовъ Боэтія въ современныя «цифры» представлена на прилагаемыхъ (фиг. 67 и 68) табличкахъ и важна намъ лишь постольку, поскольку повліяла на измѣненія формы счетныхъ приборовъ. Первымъ и главнымъ дѣломъ, употребленіе апексовъ уничтожило разницу между числомъ отложеннымъ на абакѣ и написаннымъ, а эта разница, какъ мы выше видѣли, была очень велика. Послѣ Боэція, даже ранѣе изобрѣтенія нуля и введенія его во всеобщее употребленіе достаточно было нарисовать клѣтки и заполнить ихъ соотвѣт-

Санскритскія буквы II вѣка по Р. Х. .									
Apices Боэтія и среднихъ вѣковъ .	1							8	9
Числовые знаки Губаръ западныхъ арабовъ	1									∘
Числовые знаки восточныхъ арабовъ	1									•
Числовые знаки Максима Планудa.	1									∘
Числовые знаки Деванагари . . .							6			∘
Изъ сочиненія *Mirrour of the Word*, напечатаннаго Кастономъ въ 1480 г. .	1	2	3	4		6		8	9	0
Изъ Бомбергской ариѳметики Вагнера (?), 1443	1	z	3,3	4	5	6	7	8	9	0
Изъ *De Arte Supputandi* Тонсталля, 1521	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Фиг. 67.

ствующими апексами, чтобы прочесть число, и въ такомъ же видѣ перенести его для вычисленій на абакъ. Смыслъ начертаній:

3		8

или

4			7

былъ понятенъ всѣмъ обучавшимся счисленію на абакѣ.

Несмотря, однако, на явныя преимущества новыхъ знаковъ, многіе предпочитали употреблять ихъ въ перемежку со старыми, во всѣхъ случаяхъ, когда получались пустыя клѣтки. Такъ, вмѣсто

2	3		7	5		9	8

писали 2XXX7L98. Встрѣчались и другіе способы начертанія 38 и 47 вмѣсто 308 и 4007 (смотрите выше).

Фиг. 68.

Путаница въ начертаніи сохранила на нѣкоторое время жизнь абаку, но онъ захудалъ, и изъ роли дѣйствительной машины, т. е. предмета матеріальнаго прибора обратился въ машину нарисованную—разграфку, съ обозначенными на ней разрядами и классами.

Процессъ перерожденія абака длился долго — не менѣе 500 лѣтъ, и только въ концѣ X столѣтія по Р. Х. французскій математикъ Гербертъ, извѣстный въ исторіи католичества подъ именемъ папы Сильвестра II (умеръ въ 1002 по Р. Х.), написалъ два посвященныя абаку сочиненія: «Правила вычисленія съ помощью абака» и «Небольшую книгу о дѣленіи чиселъ», которыми упразднилъ абакъ-машину и ввелъ въ употребленіе абакъ-разграфку.

	C	D	$\overset{M}{S}$	C	D	$\overset{M}{S}$	C	D	$\overset{M}{S}$	C	D	$\overset{M}{S}$	C	D	$\overset{M}{S}$	C	D	$\overset{M}{S}$	C	D	$\overset{M}{S}$	C	D	$\overset{M}{S}$	C	D	$\overset{M}{S}$
	celentis		9	temenias		8	zenis		ʌ	calctis		P	quimas		Ч	arbas		[illegible]	ormis		Ʒ	andras		Ϭ	igin		1
	C MI MI MI MI	X MI MI MI MI	MI MI MI MI	C MI MI MI	X̄ MI MI MI	I MI MI MI	C MI MI MI	X MI MI MI	MI MI MI	C MI MI	X MI MI	I MI MI	C MI MI	X MI MI	MI MI	C MI	X̄ MI	I MI	C MI	X MI	MI	Ĉ	X̄	I	C	X	I
2=	=	Z	Շ	Շ	2																						
3=		ζ	ξ																						[illegible]		Ч
																D̄C̄	L.C	V̄ Ĉ	D.Ĉ	L.C̄	V.C̄	L̄	V̄	D	L	V	S
4 4=	÷	ɡ'	ɡ'	ɋ	⊣																						
			ʒ																								
5-	Ч	ɛ	ϛ	5	h																		Ʒ		[illegible]		8
																			CCL X`	XXV.C̄	C̄C̄L̄	X̄X̄V̄	IID	CCL	XXV	IIS	Ɔ·
6=	b	L	q	P																		9	8		P		
7-	II	Λ	^	ʌ	7	V																				Ʒ	Ʒ
																			CXXI X̄	CCXV X̄	C̄X̄X̄V̄	XIID̄	ICCL	CXXV	XIIS	I Ɔ	K
8	Ч	Ч	ɛ	δ	8	∞																					
8=	ɛ	ƺ	8	8																							
9-	ЧЧ	Ч	ɕ	9	6																					Λ	Ч
9=	9	9																				·					●
	u +	deunx SSS ɛ	dextans SSI Ƨ	dodrans S Ƨ	bissi S I	septunx Ƨ	semis S	quincunx I Ƨ	triens 33	quadrans Ƨ	sextans 3	sescuncia ɛ	uncia —	semuncia ɩ	duella ᴗᴗ	sicilicus Ɔ	sextula ᴗ	dragma Ж	emisescla Ψ	tremissis H	scripulus ɜɜ	dipondius T	scamiscrupulus Є	obolus ⊢	cerates Z	siliqua ∽	calcus Q

27-колонный абакъ Герберта, возстановленный проф. Бубновымъ по различнымъ рукописямъ.

Поясненіе къ рисунку абака.—Абакъ представляетъ доску (поверхность стола, таблицу, вообще плоскость), обыкновенно раздѣленную на нѣсколько вертикальныхъ колоннъ (въ данномъ случаѣ на 27). Счисленіе на абакѣ отличается отъ нашего только тѣмъ, что необходимый намъ нуль замѣняется здѣсь пустой колонной абака, а значащія цифры не пишутся, а раскладываются, будучи разъ навсегда изображены на жетонѣ. Значитъ, наши *десятичные разряды* изображаются колоннами абака въ восходящемъ порядкѣ справа налѣво, а жетоны со значками—цифрами первыхъ десяти цѣлыхъ чиселъ (S и S) играютъ роль *коэффиціентовъ* числа, изображеннаго по нашей десятичной системѣ. Большія дуги соединяютъ колонны—разряды въ группы по 3 (классы), какъ у насъ. Въ каждомъ классѣ различаются единицы (S singularis), десятки (D—decenus) и сотни (C—centenus). Начиная съ 1.000 при знакѣ S наверху ставится еще M, т.-е. далѣе идутъ тысячи единицъ, затѣмъ тысячи тысячъ единицъ и т. д. Подъ самыми дужками помѣщены девять тогдашнихъ цифръ, а рядомъ ихъ таинственныя, извѣстныя только абацистамъ, названія: igin, andras, ormis, arbas, quimas, zenis, temenias, calctis, celentis. На самомъ верху приведенъ стихъ: *Gerbertus Latio numeros abacique figuras*, т.-е. Гербертъ даетъ Лацію (латинской Европѣ) фигуры и числа абака. На данномъ рисункѣ проведены и горизонтальныя линіи. Въ первой сверху горизонтальной колоннѣ (направо) изображено (нужно подразумѣвать, положенными жетонами) число 405, во второй—30408, въ третьей—980600 и 33, въ четвертой—75. На крайнихъ колоннахъ слѣва показано, какъ, по мнѣнію проф. Бубнова, образовались цифры абацистовъ, а изъ нихъ наши. На самомъ низу стоятъ знаки дробей у абацистовъ.

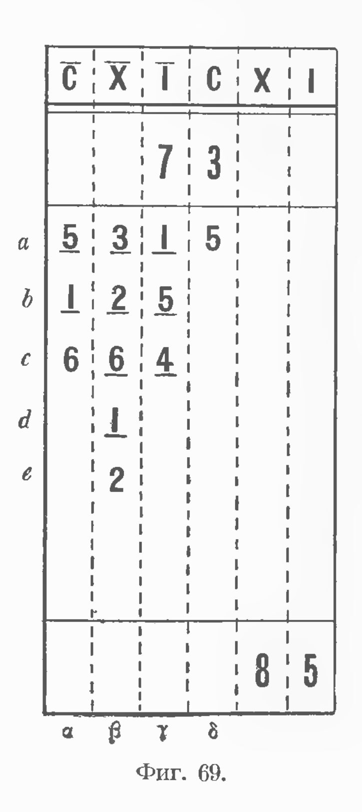
Гербертовъ абакъ. Введеніе нуля и торжество письменнаго счисленія.

Итакъ, Гербертовъ абакъ представлялъ разграфку, которая въ полномъ видѣ имѣла 27 столбцовъ для девяти классовъ единицъ и три столбца для двѣнадцатичныхъ дробей.

Счисленіе производилось письменно; все ненужное или использованное зачеркивалось. Сложеніе, вычитаніе и умноженіе производились весьма близко къ современному, хотя выкладки при умноженіи по Герберту представляютъ, на нашъ глазъ, нѣсколько хаотическую картину. Разобраться въ нихъ, все-таки, возможно, не прибѣгая къ тексту его «Правилъ вычисленія».

Такъ на прилагаемой таблицѣ (фиг. 69) изображено умноженіе 7300 (вверху) на 85 (внизу). У насъ подчеркнутыми напечатаны цифры, по ходу дѣйствія зачеркиваемыя.

Для ясности, столбцы и строчки пронумерованы у насъ буквами латинскаго и греческаго алфавитовъ, о чемъ, конечно, въ Гербертовыхъ правилахъ ничего не говорится. Порядокъ выкладокъ былъ слѣдующій:



Фиг. 69.

1) произведеніе 300 × 5; вписывалось въ клѣтки *aδ* и *aγ*;
2) 700 × 5; въ *bγ* и *aβ*;
3) 300 × 8; въ *cβ* и *bβ*;
4) 700 × 8; въ *cβ* и *aα*.
5) Получалась фигурная запись такого вида:

5 3 1 5
2 5
6 4

6) Суммировались и зачеркивались цифры столбца $1+5+$ $+4=10$; единица высшаго порядка вписывалась въ $d\beta$;

7) суммированіе столбца β давало: $3+2+6+1=12$; единица высшаго порядка вписывалось въ $b\alpha$, а 2 въ $e\beta$;

8) суммировался столбецъ $5+1=6$ и результатъ вписывался въ $c\alpha$.

Полученное произведеніе оказывалось разбросаннымъ по клѣткамъ $c\alpha$, $e\beta$ и $a\delta$, читалось такъ же, какъ читаемъ его мы, а затѣмъ выписывалась, куда слѣдуетъ, въ одной изъ слѣдующихъ трехъ транскрипцій:

либо						
	6	2		5		

либо 62̇5̈, либо 6XXI).

Процессъ дѣленія значительно разнится отъ современнаго. На фиг. 70-й изображенъ ходъ дѣйствій на простомъ примѣрѣ 4087 : 6.

Фиг. 70.

$\overline{\text{I}}$	C	X	I
			4
			6
4		8	7
1	6	6	4
1	4	4	8
	4	8	9
	1	4	4
	1	2	3
	1	4	4
		6	7
		2	1
		1	
		1	
	4	*4*	*6*
	1	*1*	*2*
	1	*1*	*1*
	6	*1*	*1*
		8	*1*
			1

Обыкновеннымъ шрифтомъ напечатаны всѣ зачеркивавшіяся, по ходу вычисленій, цифры. Надъ единицами дѣлимаго стоитъ дѣлитель 6; выше его дополненіе до 10, т. е. 4. Подъ чертою рядъ послѣдовательныхъ наращеній частнаго. Единица крупнымъ шрифтомъ въ серединѣ крайняго праваго столбца есть остатокъ отъ дѣленія.

Разобраться въ нарисованной подъ номеромъ 70 таблицѣ, безъ объясненій, невозможно.

Примѣнявшееся Гербертомъ дѣленіе было такъ называемое «дополнительное». Зачатки его встрѣчаются еще у римскихъ математиковъ, но индусы и арабы имъ не пользовались. Существовало двоякаго рода дополнительное дѣленіе: «съ избыткомъ», когда дѣлитель дополнялся до ближайшаго полнаго числа единицъ высшаго порядка (напр. 6 до 10, 18 до 20 и т. п.) или же «съ недостаткомъ», когда дѣлитель округлялся отбрасываніемъ нѣкотораго избытка (напр. 43 округлялось въ 40, 105 въ 100 и т. п.). Разнообразіе въ пріемахъ было безконечное: существовали отдѣльныя правила для дѣлителей двузначныхъ, трехзначныхъ, четырехзначныхъ. Общаго въ нихъ было только слѣдующее: при дѣленіи «съ избыткомъ» къ каждому послѣдовательному остатку прибавлялось произведеніе найденной цифры частнаго на дополненіе дѣлителя. При дѣленіи «съ недостаткомъ» дѣлимое уменьшалось на одну единицу наивысшаго разряда, и изъ этой единицы вычитались произведенія найденныхъ послѣдовательныхъ частныхъ на отброшенное, для округленія, число.

Приведенному, на фиг. 70, ходу выкладокъ соотвѣтствовалъ бы, примѣнительно къ теперешнему знакоположенію, такой рядъ формулъ:

$$1)\ 4087 = (6+4)\cdot 400 + 87$$
$$= 6\cdot \mathit{400} + 1600 + 87$$
$$2)\ 1600 = (6+4)\cdot 100 + 600$$
$$= 6\cdot 100 + 400 + 600$$
$$= 6\cdot \mathit{100} + 1000$$
$$3)\ 1000 = (6+4)\cdot 100 = 6\cdot \mathit{100} + 400$$
$$4)\ 100 = (6+4)\cdot 10 = 6\cdot \mathit{40} + 160$$
$$5)\ 160 = (6+4)\cdot 10 + 60 = 6\cdot 10 + 40 + 60$$
$$= 6\cdot \mathit{10} + 100$$

6) $100 = (6+4)\cdot 10 = 6\cdot\mathit{10} + 40$

7) $40 + 87 = 127$

8) $127 = (6+4)\cdot 10 + 27 = 6\cdot 10 + 4\cdot 10 + 27$
$= 6\cdot\mathit{10} + 67$

9) $67 = (6+4)\cdot 6 + 7 = 6\cdot\mathit{6} + 24 + 7$

10) $24 = (6+4)\cdot 2 + 4 = 6\cdot 2 + 4\cdot 2 + 4$
$= 6\cdot\mathit{2} + 12$

11) $12 = (6+4)\cdot 1 + 2 = 6\cdot\mathit{1} + 6$

12) $6 = 6\cdot\mathit{1}$

13) $7 = 6\cdot\mathit{1} + 1$

Всѣ послѣдовательныя наращенія частнаго набраны курсивомъ какъ въ вышеданныхъ формулахъ, такъ и въ выкладкахъ на фиг. 70 подъ нижнею горизонтальною чертой. Суммированіе курсивовъ даетъ частное 681, набранное на фиг. 70-й жирнымъ шрифтомъ.

Окончательный ударъ абаку былъ нанесенъ, однако, не профессіональнымъ ученымъ или математикомъ, а человѣкомъ практической сметки—итальянскимъ купцомъ и дѣльцомъ Леонардомъ Пизанскимъ, по прозванію «Фибоначчи», жившимъ въ концѣ XII—началѣ XIII вѣка.

Въ 1202 году онъ издалъ книжку, подъ названіемъ «Liber abaci», «книжка объ абакѣ», начинающуюся такъ:

«Девять индусскихъ знаковъ суть слѣдующіе: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Съ помощью этихъ знаковъ и знака 0, который называется по-арабски *сифръ*, можно написать какое угодно число».

Въ 1228 г. книжка вышла вторымъ изданіемъ.

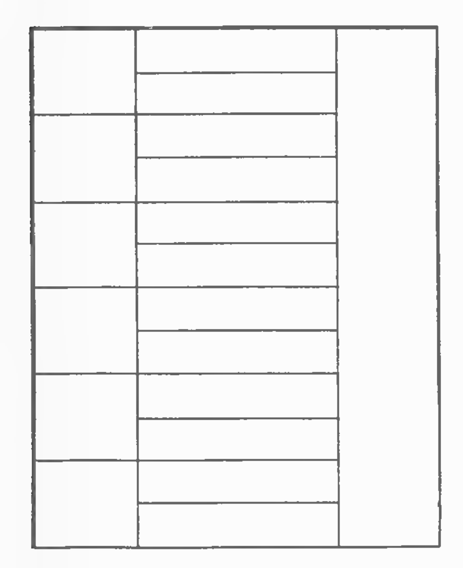
Авторъ, составляя «Liber abaci», навѣрное не думалъ, что убьетъ абакъ. Случилось это, конечно, не сразу, а постепенно. Еще три столѣтія Гербертова разграфка влачила жалкое существованіе, мѣняя по временамъ внѣшнее обличье. Введеніе нуля сдѣлало абакъ излишнимъ для наиболѣе труднаго изъ дѣйствій—дѣленія, такъ какъ давало возможность использовать индусскій и арабскій пріемы, весьма близкіе съ теперешнимъ. Арабскій способъ сталъ даже вскорѣ называться «divisio aurea» (золотое дѣленіе), въ отличіе отъ Гербертовскаго «divisio ferrea» (желѣзное дѣленіе).

Можно только удивляться, какъ народы Запада, болѣе двухъ тысячъ лѣтъ работавшіе на абакѣ, не пришли давно къ заключенію о полезности особаго знака для *пустыхъ* мѣстъ, *пустыхъ* столбцовъ [1]). Можетъ быть, случилось это именно *благодаря* абаку, облегчавшему наглядное чтеніе числа. О неудобствахъ начертанія числа тогда не думали, такъ какъ письменное счисленіе играло очень незначительную роль въ жизни древнихъ и первой половины средневѣковья.

Нуль — *ничто* — далъ, временно, полную побѣду письменному счету надъ механическимъ и устнымъ.

Рецидивъ безписьменности.—Счетная скамья (Rechenbank) около-реформаціоннаго періода.

Въ то время какъ абакъ медленно умиралъ, а представители ученыхъ—свѣтскихъ и духовныхъ—корпорацій увлекались письменнымъ счисленіемъ и математическими откровеніями, шедшими съ Востока, грамотный и полуграмотный дѣловой міръ незамѣтно выработалъ для своихъ узкихъ цѣлей счетную машину новаго типа, образцомъ которой послужилъ тотъ же абакъ, но видоизмѣненный и, въ главной сути, возвращенный къ своей первообразной простотѣ: исчезли не только апексы и надписи, но даже римскія цифры, и водворились вновь безписьменныя марки. Притомъ верхняя сторона абака повернулась влѣво, столбцы легли горизонтально, и каждый раздѣлился пополамъ на двѣ продольныя графы или полоски. Справа же получилось поле для запасныхъ марокъ (фиг. 71).



Фиг. 71.

[1]) Сравни древнерусское «безчислъ» въ смыслѣ «нуля».

Встрѣчались разные варіанты описаннаго устройства; изъ нихъ главные—англійскіе и нѣмецкіе. Въ англійскомъ жетоны ставились на поля клѣтокъ, въ нѣмецкомъ передвигались вдоль линій, почему самый счетъ назывался «линейнымъ» (Linienrechnung; nach Linien rechnen).

Въ англійскихъ доскахъ широкая клѣтка слѣва каждой горизонтальной полосы предназначалась для десятковъ; нижняя узкая—для единицъ; верхняя узкая—для пятковъ. Отношеніе единицъ любого изъ столбцовъ къ единицамъ близлежащихъ верхняго и нижняго было совершенно произвольно и зависѣло исключительно отъ системы цѣнностей и мѣръ, съ которыми приходилось имѣть дѣло.

Фунты . . . . . .
Унціи . . . .
Драхмы . . . .
Скрупулы . . . . . .
Граны . . . .

Фиг. 72.

Такъ на фиг. 72 и 73—на первой отложены 29 фунтовъ 11 унцій 7 драхмъ 1 скрупулъ 18 грановъ нюрнбергскаго или аптекарскаго вѣса; на второй — 574 фунта 17 шиллинговъ 8 пенсовъ въ англійской валютѣ.

Въ качествѣ общепринятаго въ дѣловыхъ кругахъ числительнаго прибора, счетная скамья вошла во всеобщее употребленіе въ первой половинѣ XV вѣка: слѣдовательно, къ этому времени окончилось офиціальное существованіе абака.

Несмотря на примитивность, а можетъ быть благодаря ей, новое счетное приспособленіе проявило большую жизненность, продержавшись въ романскихъ государствахъ около полутораста лѣтъ, въ Германіи свыше двухсотъ, а въ Англіи безъ малаго триста. Послѣдніе расчеты помощью счетной скамьи и бирокъ встрѣчаются въ англійскомъ государственномъ казначействѣ въ документахъ, относящихся къ 1676 году.

Scores of pounds (Двадцатки фунтовъ) . . .
Фунты стерлинговъ . .
Шиллинги . . . . . .
Пенсы . . . .

Фиг. 73.

Такая живучесть именно въ Германіи и Англіи объясняется чрезвычайной запутанностью мѣровѣснаго обихода обоихъ государствъ на рубежѣ среднихъ и новыхъ вѣковъ: раздробленность Германіи и консервативность Англіи представляли удобную почву для нарожденія и сохраненія самыхъ фантастичныхъ системъ мѣръ, вѣса и денегъ, а счетная скамья чрезвычайно легко приспособлялась къ каждой. Такъ, напр., въ Англіи сравнительно еще недавно шерсть въ работѣ учитывалась «мѣшками», «тодами» и «фунтами». Одинъ мѣшокъ составлялъ 13 тодовъ (tods), одинъ тодъ—28 фунтовъ.

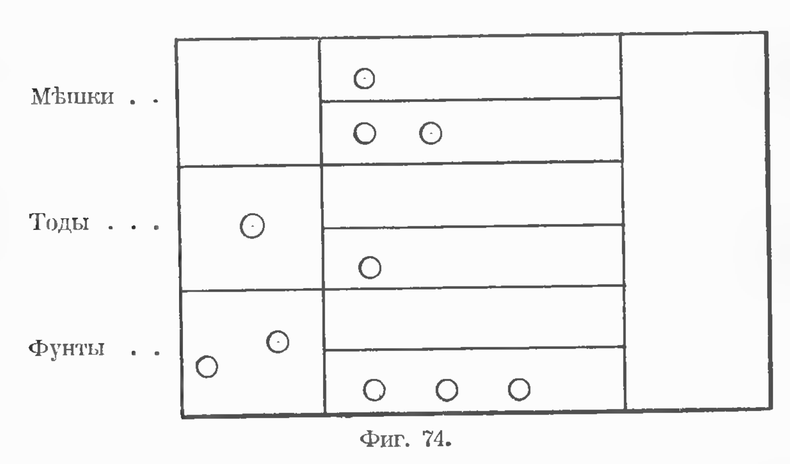
Любой безграмотный прядильщикъ на ткацкой фабрикѣ могъ сообразить по выданному ярлычку, что за нимъ числилось 7 мѣшковъ 11 тодовъ 23 фунта отпущенной для обра-

ботки шерсти, или же, что ему причиталось именно столько-то задѣльной платы.

И въ Германіи и въ Англіи счетная скамья оставила надолго неизгладимые слѣды.

Въ первой это была дѣйствительно «скамья» (Bank, Rechenbank)—непремѣнная принадлежность всякой конторы, торговаго дома и мѣняльной лавки.

Отсюда—завоевавшее себѣ всемірное распространеніе слово «банкъ», въ значеніи учрежденія, торгующаго деньгами и производящаго расчетныя операціи съ валютой.



Фиг. 74.

Въ болѣе практичной Англіи доску или скамью замѣнили клеенчатыя и кожаныя салфетки или скатертки: ихъ можно было свернуть, убрать и снова разложить; спрятать въ портфель или карманъ.

Соотвѣтствующимъ образомъ разрисованныя въ клѣтку (chequered) скатертки напоминали шашешницу. По ихъ же образцу графили небольшихъ размѣровъ бланки. для расчетовъ съ плательщиками и кліентами. А такъ какъ въ XVI и XVII столѣтіяхъ почти весь денежный обмѣнъ страны сосредоточивался въ казнѣ, то естественно, что отъ «chequered» самое Государственное Казначейство стало называться «Exchequer» (Эксчекеръ), а расчетный бланкъ для платежей наличными—«чекомъ» (cheque).

Однако, несмотря на отсталость Германіи и консерватизмъ Англіи, всеобщая грамотность и письменность не только до-

били къ концу XVII столѣтія счетную скамью, но и породили своеобразное презрѣніе къ механическимъ пріемамъ вычисленія. Такъ что, когда Западная Европа познакомилась въ началѣ XIX столѣтія съ русскими счетами и китайскимъ суанъ-паномъ, большинство было склонно вѝдѣть въ нихъ остатки варварства.

Это и неудивительно, такъ какъ никто не придавалъ тогда серьезнаго значенія даже тѣмъ, сравнительно очень совершеннымъ, прототипамъ современныхъ счетныхъ машинъ, которыя были созданы еще въ XVII столѣтіи Паскалемъ и Лейбницемъ.

Люди не могли себѣ представить, чтобы человѣкъ со своею сметкою, сообразительностью и умомъ когда-либо являлся въ роли только силы, всѣ же счетныя операціи производились бы самостоятельно машиной. Главными двигателями прогресса и единственными законными пособниками математическаго мышленія считались бумага и перо, отъ вѣры въ исключительную непогрѣшимость и всемогущество которыхъ не такъ-то легко было отрѣшиться.

Заря и расцвѣтъ механическаго счета.

Когда въ Англіи еще процвѣтали счетная скамья и бирки, во Франціи уже занималась заря механическаго счета.

Въ серединѣ тридцатыхъ годовъ XVII вѣка извѣстный французскій философъ и математикъ Власъ Паскаль (Blaise Pascal), будучи пятнадцатилѣтнимъ юношей, задался цѣлью облегчить счетныя операціи механическимъ откладываніемъ и подведеніемъ итоговъ.

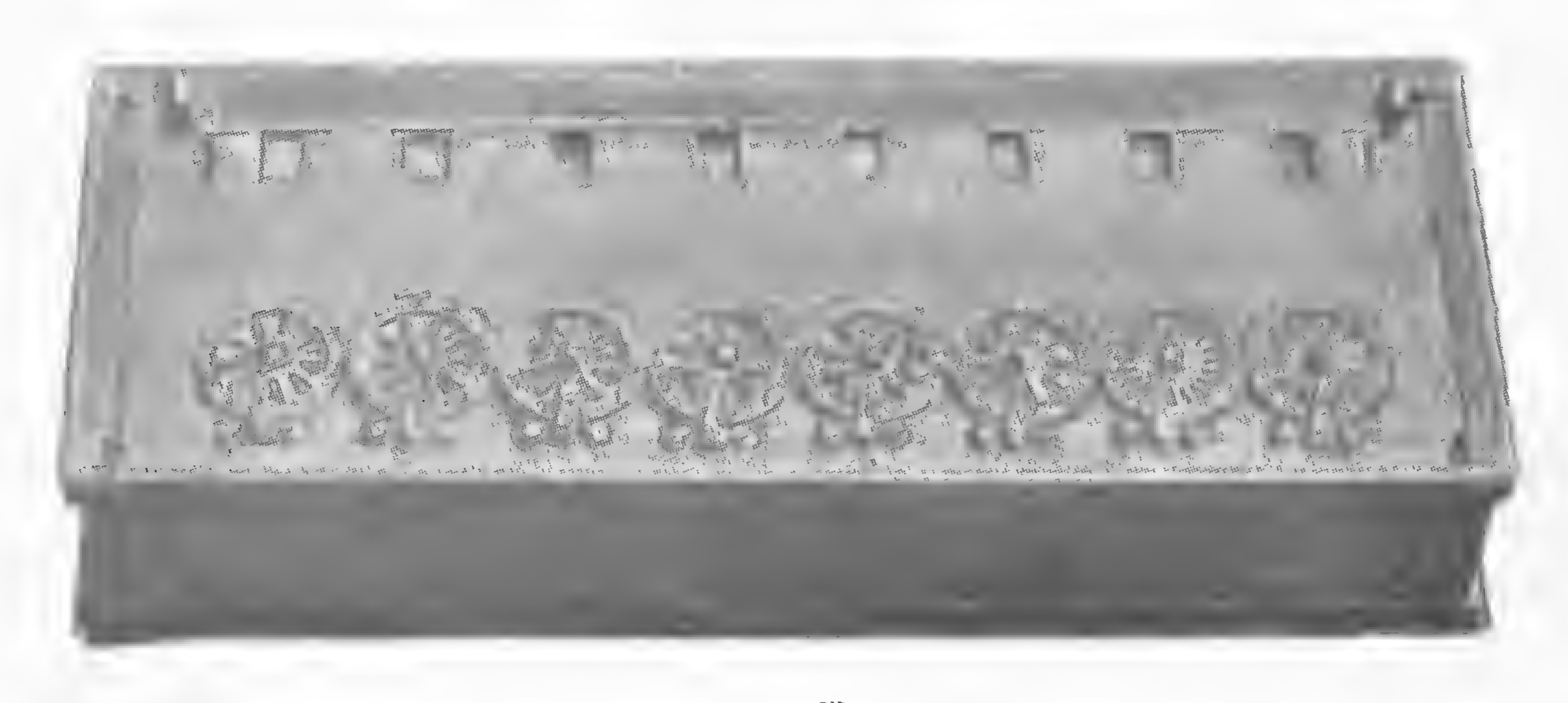
Если принять въ соображеніе, что римскій абакъ съ передвижными пуговками (римскіе счеты) былъ уже заброшенъ, что апексами Боэція никто не пользовался, а употреблялись гладкія безписьменныя марки, что съ русскими счетами Западная Европа не была знакома, то слѣдуетъ признать, что Паскаль задался дѣйствительно смѣлой и геніальной идеей.

Онъ проработалъ надъ ней не менѣе десяти лѣтъ, построилъ свыше пятидесяти пробныхъ моделей, прежде чѣмъ остановился на опредѣленномъ типѣ.

Въ числѣ моделей были съ рейками и съ зубчатками, прямыми и криволинейными, съ передаточными цѣпями и безконечными ремнями, съ движеніемъ прямолинейнымъ и круговымъ, съ коническими и цилиндрическими валами, съ дисками, лентами и шестернями. Однимъ словомъ, Паскалемъ былъ испробованъ весь арсеналъ приспособленій, изъ котораго черпали позднѣйшіе изобрѣтатели машинъ.

Наконецъ, въ 1646 году Паскаль придалъ своей машинѣ окончательный видъ, приспособивъ ее къ спеціальной цѣли подсчета денежныхъ сборовъ и налоговъ по городу Руану и окрестностямъ, гдѣ отецъ его занималъ мѣсто «интенданта», т. е. агента государственнаго обложенія и фиска.

Счетъ велся тогда во Франціи на «динаріи» (déniers), «су» (sols) и «ливры» (livres); на одинъ су приходилось двѣнадцать динаріевъ и на одинъ ливръ двадцать су [1]). Въ соотвѣтствіи съ денежной системой, на крышкѣ ящика, въ которомъ помѣщался механизмъ, было восемь вращающихся дисковъ съ рукоятками и циферблатами. На первомъ, считая справа, было



Фиг. 75.

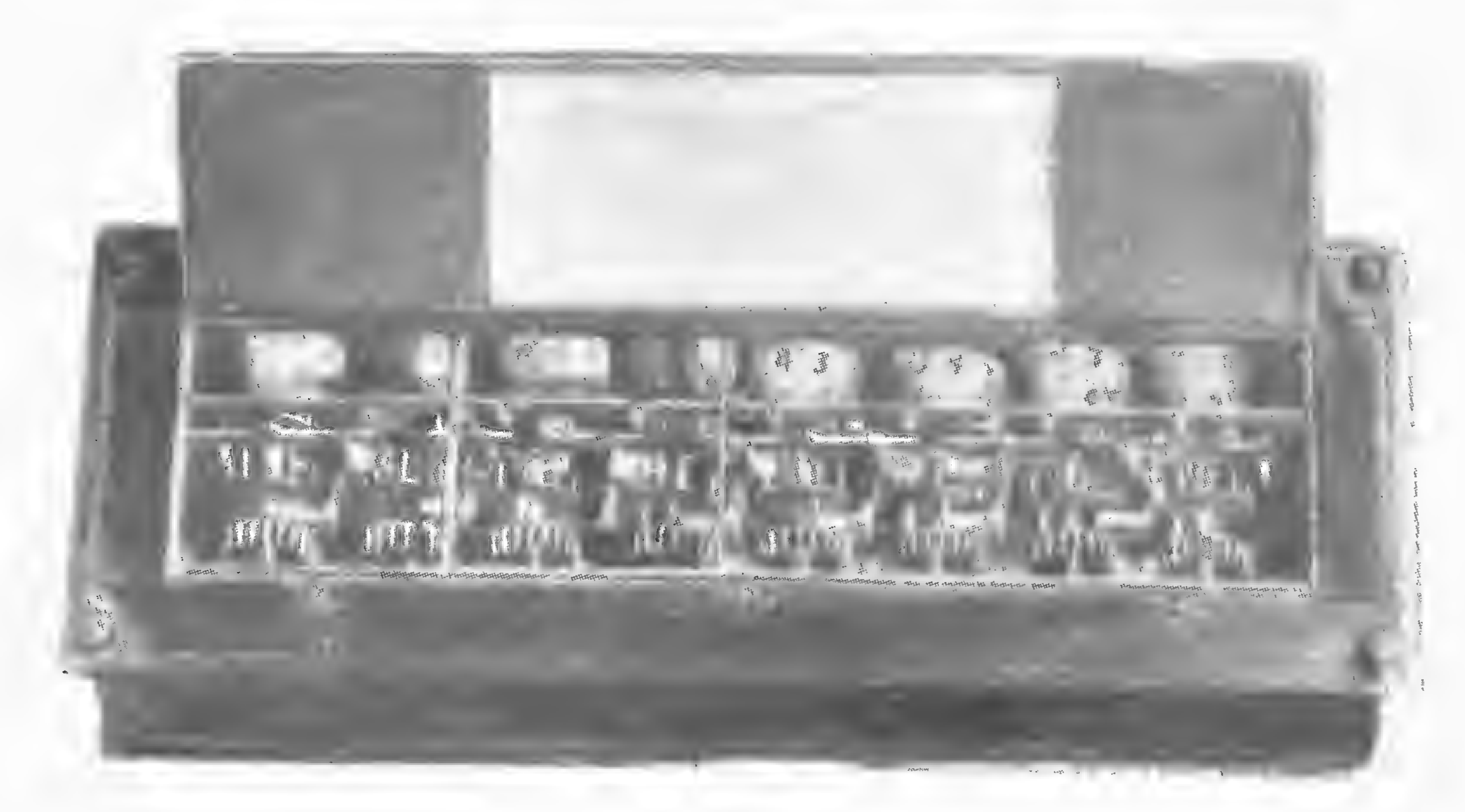
12 подраздѣленій для отсчета динаріевъ, или «денье» (déniers); на второмъ двадцать—для су (sols), а на остальныхъ по десяти, для ливровъ и десятковъ, сотенъ, тысячъ, десятковъ тысячъ и т. д. ливровъ (фиг. 75).

Вращеніе дисковъ, помощью системы зубчатыхъ колесъ, передовалось валикамъ. съ нанесенными на нихъ цифрами (фиг. 76).

---

[1]) Сравни англійское 12 пенс. на 1 шилл. и 20 шилл. на 1 ф. ст.

Полному обороту каждаго изъ дисковъ соотвѣтствовало автоматическое перемѣщеніе ближайшаго слѣва валика на одно дѣленіе. Такимъ образомъ двѣнадцать денье сами собой отмѣчали на соотвѣтствующемъ валикѣ приращеніе на одинъ су; 20 су немедленно переводились въ ливры; каждые 10 ливровъ—въ десятки ливровъ и т. д.



Фиг. 76.

Механизмъ приводился въ движеніе вращеніемъ рукоятокъ по направленію часовой стрѣлки; обратное служило для приведенія всѣхъ показаній къ нулю.

Въ верхней половинѣ крышки было 8 окошечекъ, по числу дисковъ. Первое изъ нихъ, считая справа влѣво, показывало денье, второе — су, третье — ливры, четвертое — десятки ливровъ и т. д.

Высшій возможный итогъ, даваемый машиной, былъ, слѣдовательно, 999 999 ливровъ 19 су и 11 денье.

Для уясненія процесса работы на машинѣ Паскаля, покажемъ, какъ сложить на ней 19 ливровъ 16 су 7 денье и 27 ливровъ 14 су 15 денье.

По приведеніи всѣхъ рукоятокъ и показаній окошечекъ къ нулю, четвертая рукоятка справа ставится на 1, третья на 9, вторая на 16 и первая на 7. Въ окошечкахъ немедленно выскакиваютъ соотвѣтствующія цифры и числа, послѣ чего всѣ рукоятки опять приводятся къ нулю.

Затѣмъ ставимъ четвертую рукоятку на 2 въ соотвѣтственномъ оконцѣ появляется цифра 3 ($1+2=3$). Третью рукоятку ставимъ на 7—въ третьемъ оконцѣ мелькаетъ рядъ цифръ и устанавливается цифра 6, и въ то же время цифра 3 четвертаго оконца мѣняется на 4.

Переводимъ рукоятку на 14—во второмъ оконцѣ выскакиваетъ 10, а цифра третьяго мѣняется съ 6 на 7. Въ самомъ дѣлѣ, $16+14=30$; $30=20+10$; 20 су даютъ полный оборотъ, отмѣчающійся единицей на валикѣ ливровъ ($6+1=7$), а 10 су остаются во второмъ оконцѣ.

Наконецъ ставимъ первую рукоятку на 5—въ первомъ оконцѣ цифра 7 мѣняется на 0, а во второмъ 10 на 11.

Окончательныя показанія дадутъ: 47 ливровъ 11 су 00 денье.

Слѣдуетъ отмѣтить чрезвычайно остроумное приспособленіе, придуманное Паскалемъ для дѣйствія вычитанія: на валикахъ, на двухъ параллельныхъ лентахъ, имѣлся двойной рядъ цифръ и чиселъ—одинъ восходящій, другой нисходящій. Самыя оконца были снабжены общимъ для всѣхъ скользящимъ затворомъ, открывавшимъ, по желанію, то восходящую, то нисходящую ленту валиковъ. Достаточно было открыть нижнюю половину всѣхъ оконцевъ и закрыть верхнюю, чтобы вращеніе рукоятокъ перемѣщало данныя въ убывающемъ порядкѣ.

Работа на машинѣ Паскаля шла, относительно, крайне медленно. Процессы умноженія и дѣленія протекали едва ли не еще медленнѣе, чѣмъ на русскихъ счетахъ, такъ какъ каждократное приведеніе къ нулю передъ повторнымъ сложеніемъ и вычитаніемъ, которыми замѣнялись умноженіе и дѣленіе, отнимало много времени.

Нынѣ машина Паскаля— антикварная рѣдкость, имѣющаяся только въ музеяхъ; извѣстны всего четыре сохранившіеся экземпляра.

Лучшій изъ нихъ—съ котораго сдѣланы прилагаемые рисунки—собственность частнаго коллекціонера, г-на М. Богуэна (Baugouin) въ Бордо.

Предполагается, что бордоскій экземпляръ —собственноручной работы Паскаля. Изготовленъ въ 1647 году для великаго

канцлера Франціи Сегюе (le grand chancelier Séhuier) по случаю испрошенія привилегіи и патента на изобрѣтеніе.

На внутренней сторонѣ крышки ящика надпись:

«Illustrissimo et integerrimo Franciae cancellario D. D. Petro Seguier Blasius Pascal patricius arvernus inventor L. D. D.Pascal».

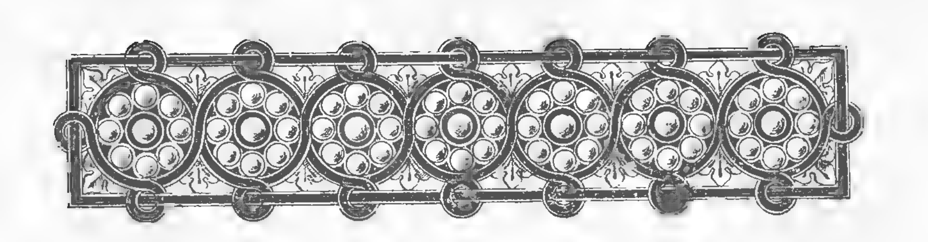
Т. е.:

«Достославнѣйшему и безупречнѣйшему канцлеру Франціи Д. Д. Петру Сегюе—овернскій дворянинъ Д. Д. Паскаль, изобрѣтатель».

Паскалева машина—прототипъ всѣхъ существующихъ, даже наиболѣе усовершенствованныхъ, машинъ. Кто хорошо понялъ механизмъ прототипа, легко усвоитъ особенности всякой другой конструкціи.

Другъ Паскаля, богословъ Арно (Arnaud), говоритъ въ своихъ воспоминаніяхъ, что Паскаль предполагалъ приспособить свою машину также къ извлеченію корней и четыремъ дѣйствіямъ надъ дробями; но смерть помѣшала ему осуществить свои планы.





Послѣдователи Паскаля.

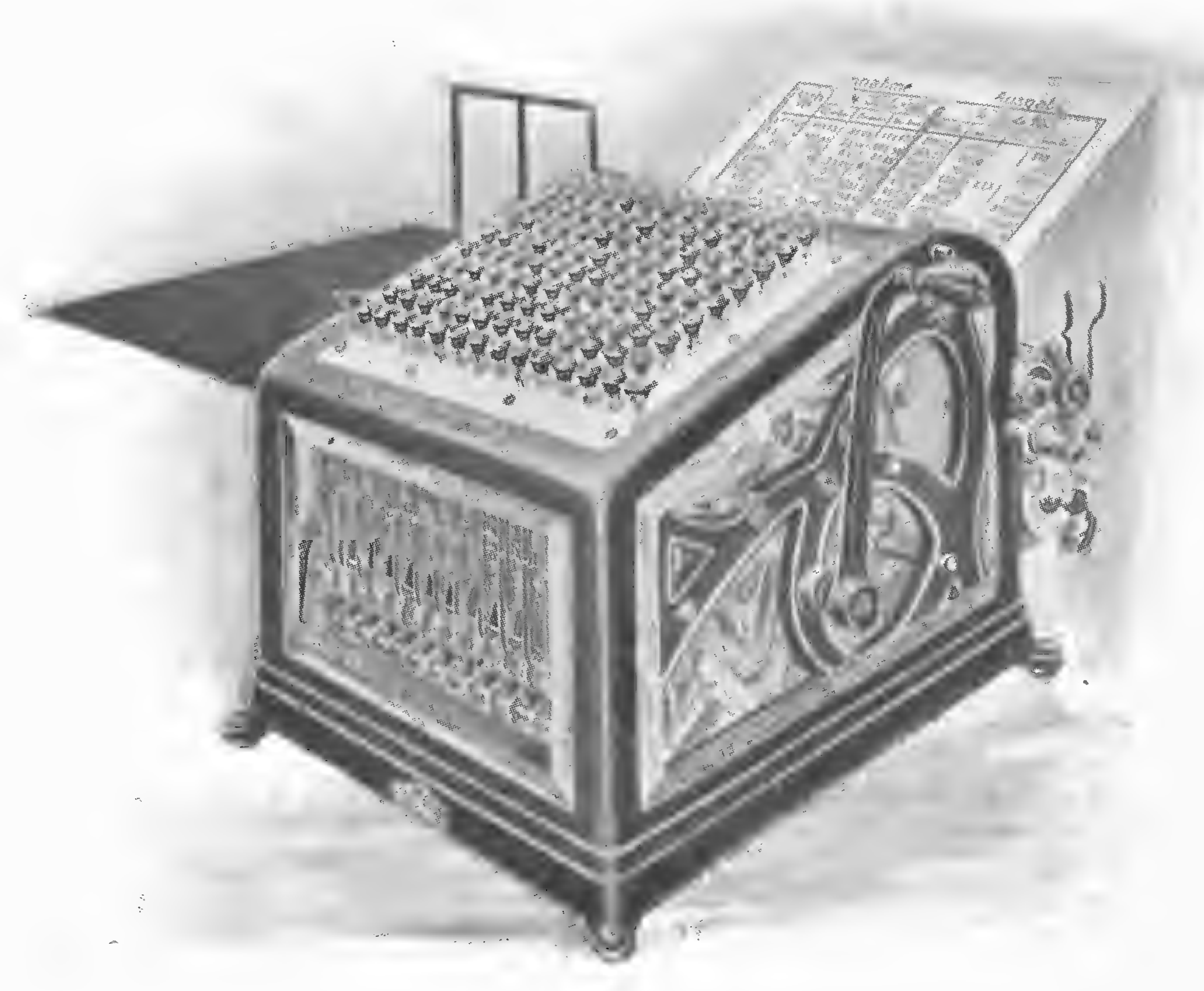
Новѣйшія машины.

Усилія всѣхъ послѣдователей Паскаля были направлены къ двумъ главнымъ цѣлямъ: во-первыхъ, къ устраненію медлительнаго процесса поочереднаго вращенія ряда отдѣльныхъ рукоятокъ; и во-вторыхъ, къ ускоренію дѣйствій умноженія и дѣленія.

Побочными усовершенствованіями явились уже впослѣдствіи: отпечатываніе результатовъ на карточкахъ, бумажныхъ лентахъ листахъ или книгахъ, приспособленіе особыхъ механизмовъ для возведенія въ степень, извлеченія корня, логариѳмированія; устройство звонковъ, предупреждающихъ о неправильномъ манипулированіи; электрическихъ двигателей взамѣнъ работы вручную, клавишей вмѣсто рукоятокъ и пр. Нѣкоторые изъ типовъ новѣйшихъ сложныхъ машинъ представлены на фиг. 77, 78, 79.

Замѣнить рядъ отдѣльныхъ рукоятокъ одною общею удалось еще при жизни Паскаля нѣмецкому ученому Лейбницу, создавшему въ 1671—73 гг. типъ машины, усовершенствованный впослѣдствіи Томасомъ. Задача—однимъ оборотомъ рукоятки не только поворачивать цифровые валики каждый на различныя доли оборота, но и вовсе выключать нѣкоторые изъ общаго всѣмъ прочимъ вращательнаго движенія была разрѣшена Лейбницемъ

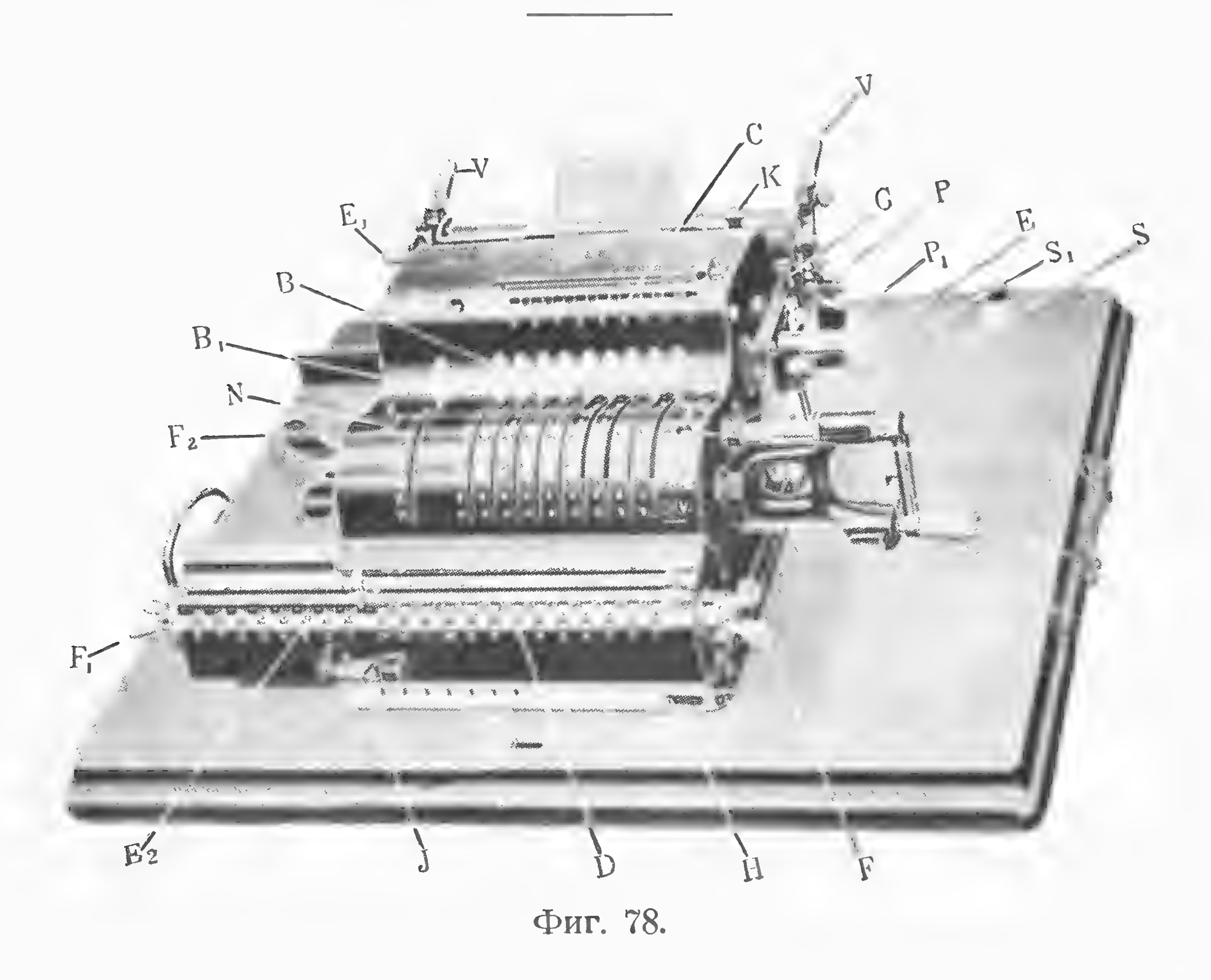
путемъ введенія въ систему такъ называемыхъ «дифференціальныхъ зубчатыхъ колесъ», или цилиндровъ, съ наискось срѣзанными зубцами. Такимъ образамъ каждое «дифференціальное колесо» являлось, по отношенію къ приводимымъ имъ въ движеніе шестернямъ, какъ бы имѣющимъ перемѣнное число зубцовъ (отъ 0 и до 10) въ зависимости отъ того, какою частью своей зубчатой поверхности оно входило въ соприкосновеніе съ шестер-



Фиг. 77.

нями. Внесенное Томасомъ усовершенствованіе состояло главнымъ образомъ въ томъ, что дифференціальныя колеса Лейбница онъ замѣнилъ такими же валами. Разница между тѣми и другими наглядно усматривается на фиг. 80 и 81.

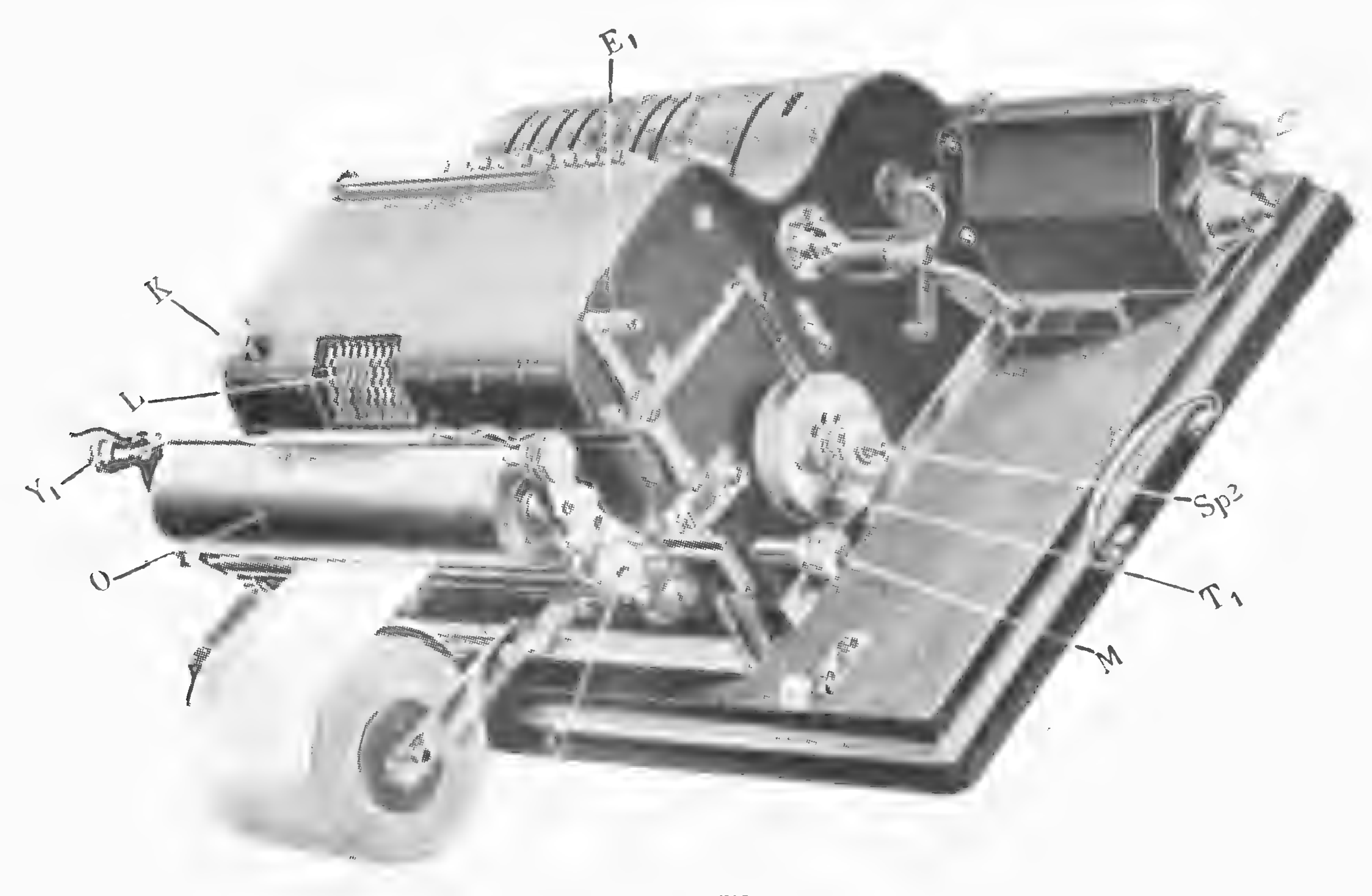
На фигурѣ 81-ой ясно видно, какъ съ помощью кнопокъ, скользящихъ вдоль прорѣзовъ въ крышкѣ аппарата, перемѣщаются скользящія вдоль осей подъ крышкой шестерни, которыя, въ зависимости отъ установки, либо вовсе не входятъ въ соприкосновеніе съ зубчиками вала, либо, по желанію работаю-



Фиг. 78.

щаго,—съ однимъ, двумя, тремя, пятью и пр.; всѣ же валы приводятся въ движенiе одной общей рукоятью *b*.

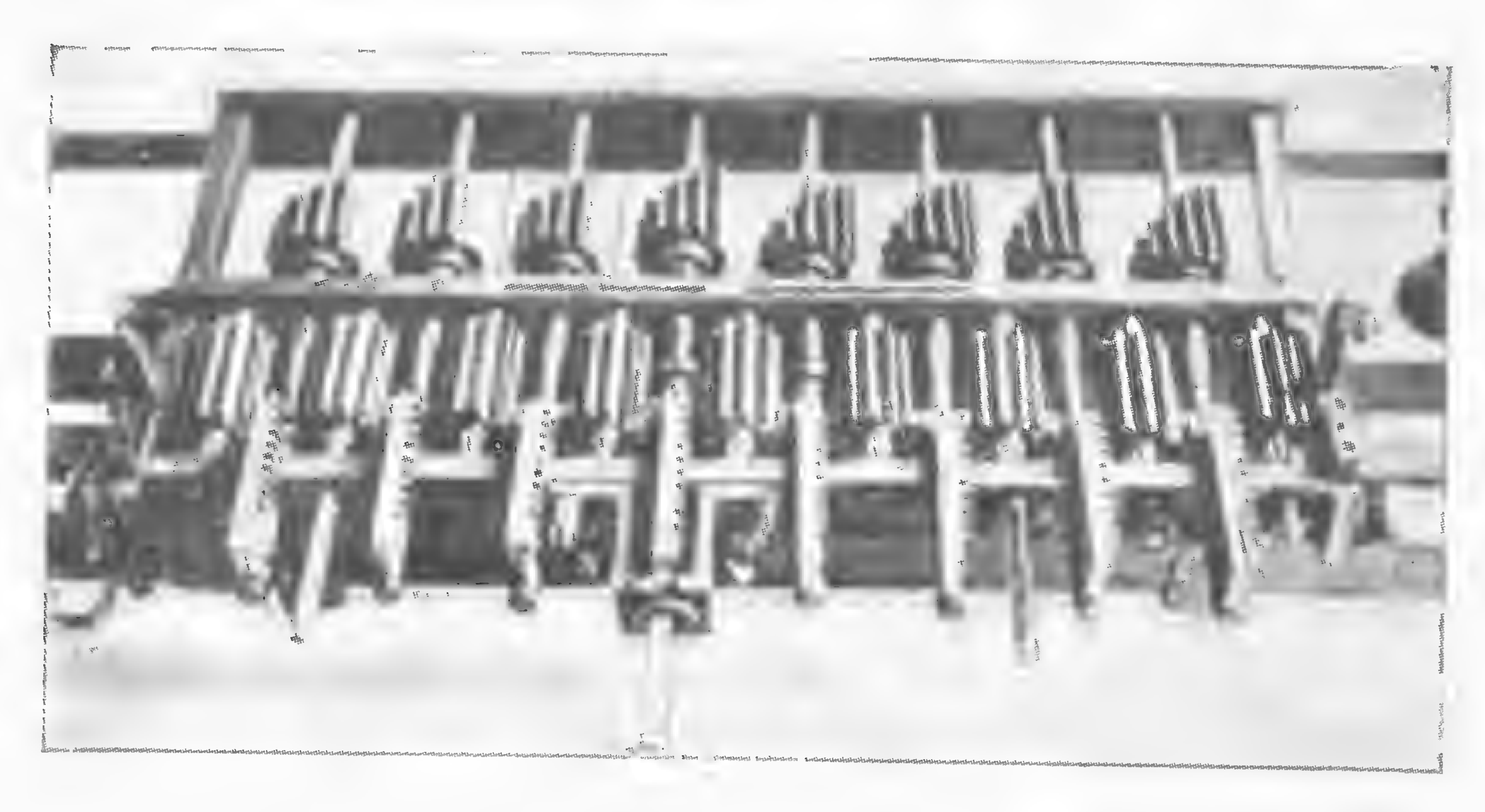
На фиг. 82 изображена типичная для всѣхъ построенныхъ по системѣ Томаса машинъ рабочая доска ариѳмометра Буркхарда. Подъ буквой *O* обозначены на ней щели съ цифрами,



Фиг. 79.

вдоль которыхъ движутся салазки съ указателемъ, помощью котораго шестерни устанавливаются на соприкосновенiе съ любымъ числомъ зубчиковъ дифференцiальнаго вала. Понятно, что каждой щели соотвѣтствуетъ отдѣльный валъ; а *K* — общая всѣмъ имъ рукоятка.

Чрезвычайно остроумную разновидность машины Томаса встрѣчаемъ въ круглой машинкѣ «Гауссъ», представленной на фиг. 83 (общiй видъ), 84 (разрѣзъ вдоль оси) и 85 (разрѣзъ перпендикулярно оси). Всѣ Томасовскiе валы замѣнены въ



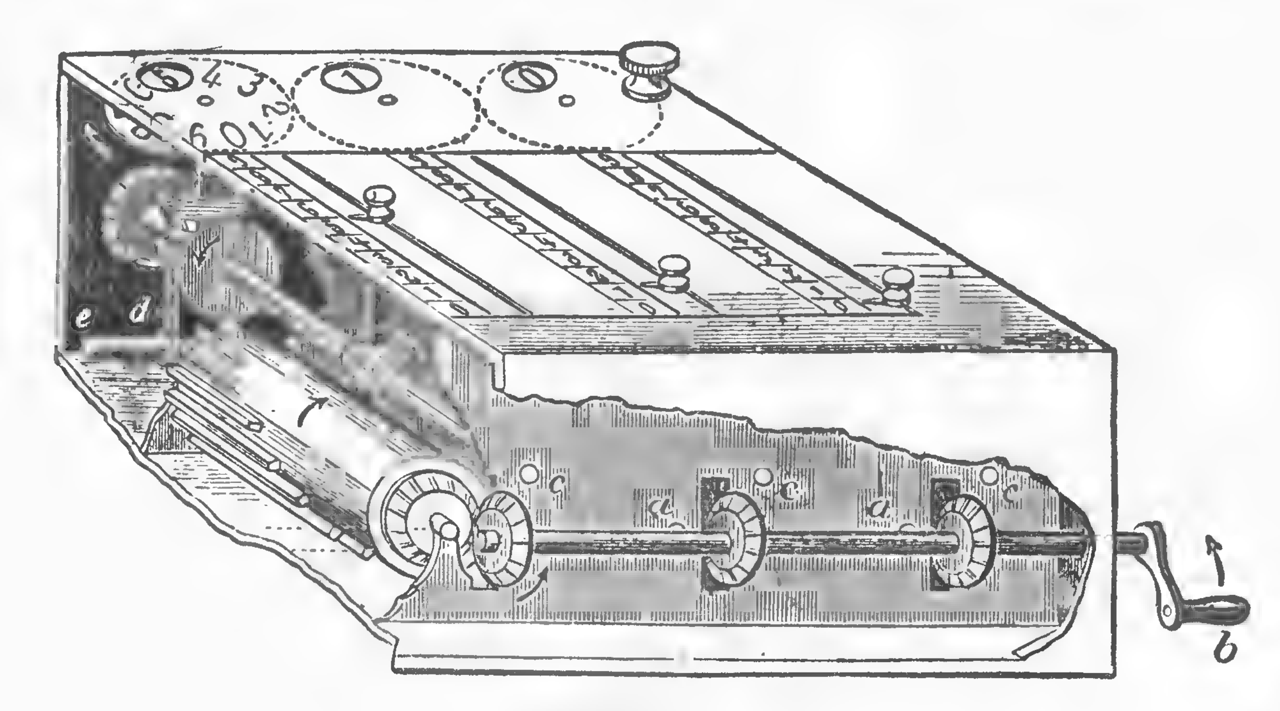
Фиг. 80.

«Гауссѣ» однимъ дискомъ съ рельефно выдающимися зубцами. Оси шестерней расположены лучеобразно; самыя шестерни, свободно скользящiя вдоль осей по желобкамъ, устанавливаются на соотвѣтствующее заданiю число зубцовъ помощью кнопокъ *S* (фиг. 84 и 85). Тогда одинъ полный оборотъ рукоятки *K* приводитъ зубцы диска по очереди въ соприкосновенiе со всѣми шестернями, которыя, въ свою очередь, перемѣщаютъ на соотвѣтствующее число дѣленiй цифрованные валики.

Результаты выскакиваютъ въ оконцахъ вдоль внѣшняго горизонтальнаго обода цилиндрической коробки, въ которую заключенъ механизмъ.

Машинка «Гауссъ» весьма интересна по мысли и по выполненiю, но не имѣетъ серьезнаго значенiя, вслѣдствiе неудобнаго размѣщенiя частей, такъ какъ круговое и лучеобразное распо-

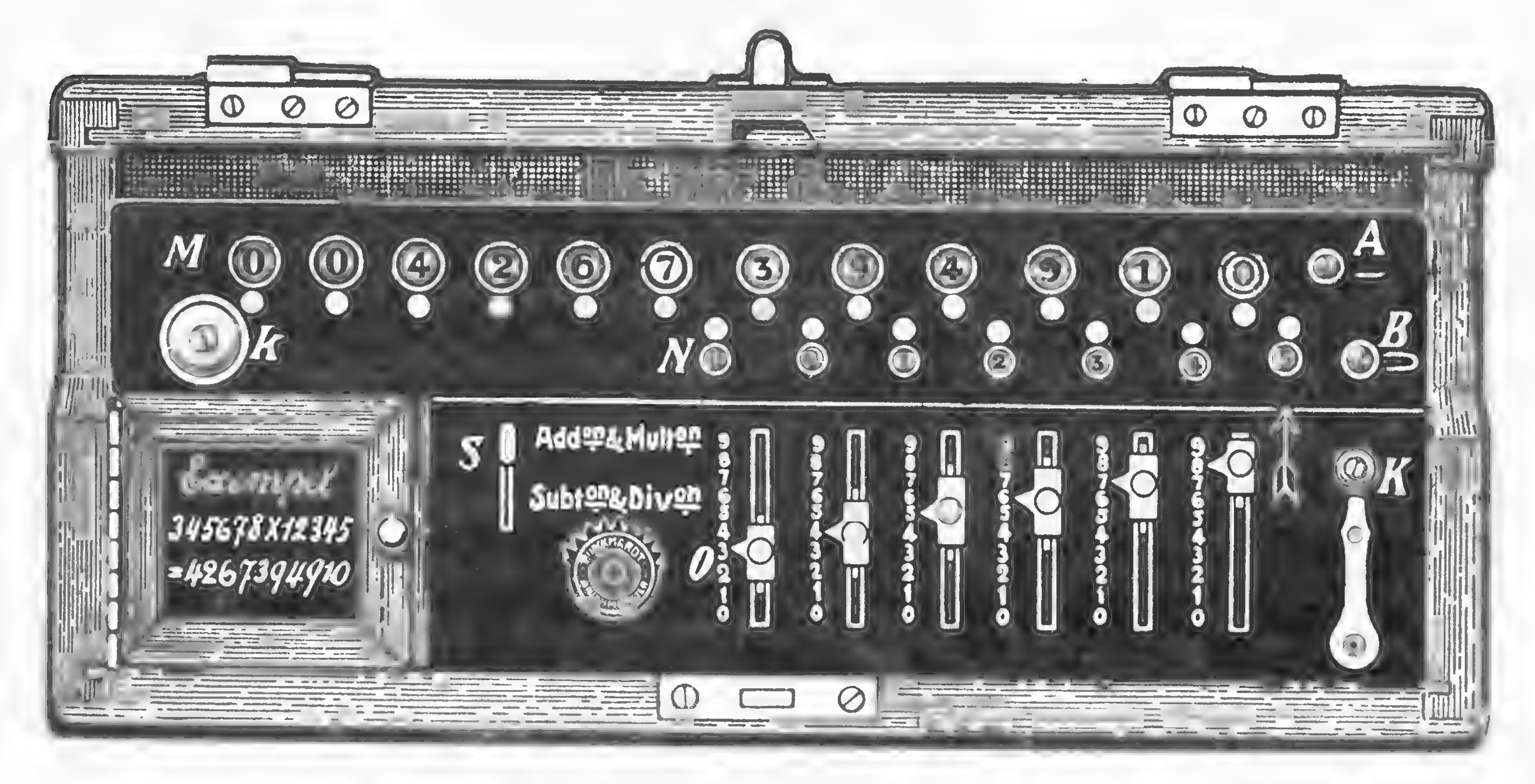
ложеніе заданій и отвѣтовъ не соотвѣтствуетъ общепринятому способу нашего письма, а потому даетъ поводъ къ опискамъ и ошибкамъ. Къ тому же регистръ дѣйствія машинки очень ограниченъ, какъ слѣдствіе ея незначительныхъ размѣ-



Фиг. 81.

ровъ. Увеличеніе же размѣровъ сдѣлало бы машинку громоздкой, а результаты неудобоохватываемыми однимъ взглядомъ.

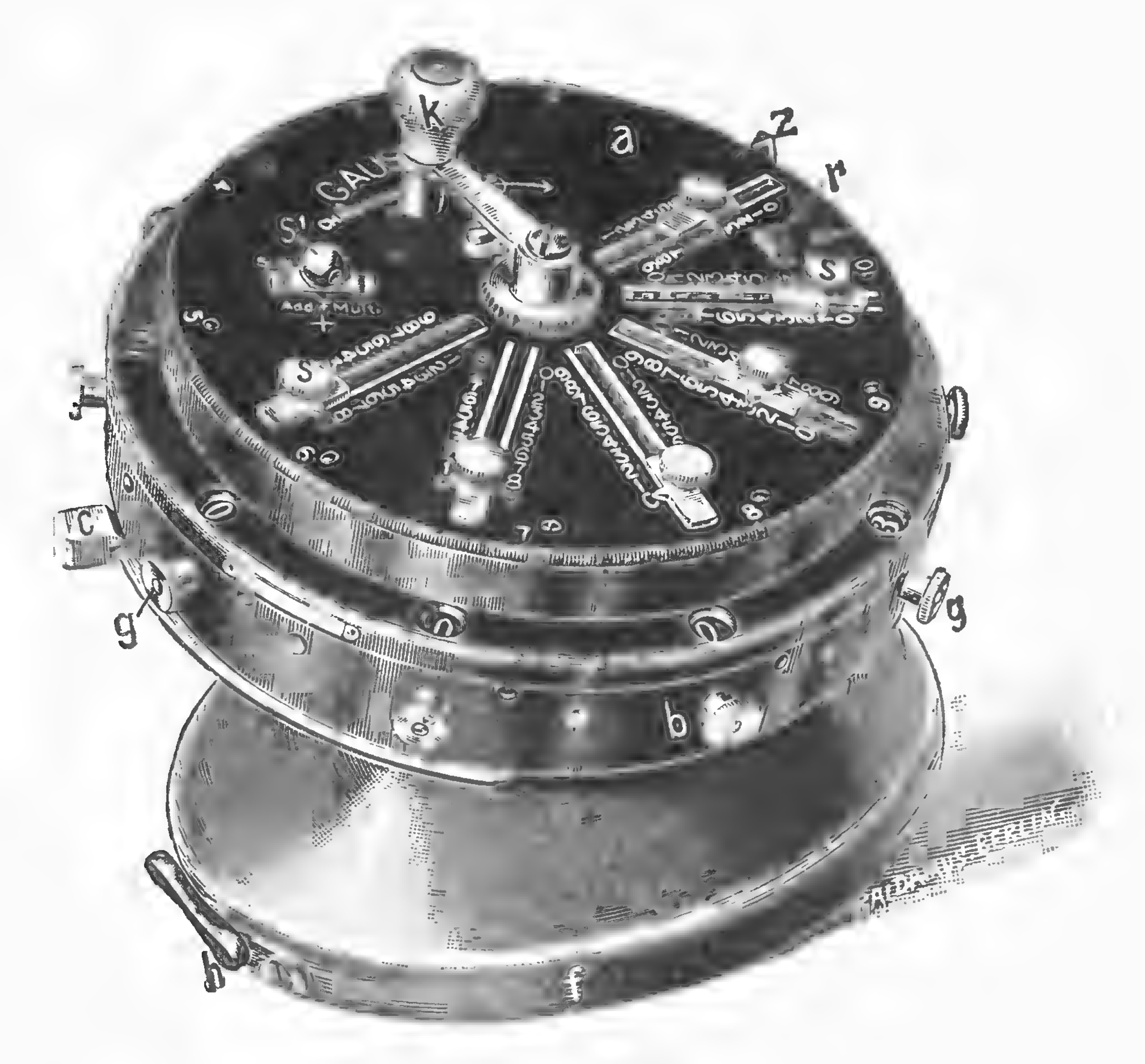
Достойными соперницами Томасовскихъ машинъ и, безспорно, лучшими изъ всѣхъ счетныхъ аппаратовъ, доступныхъ



Фиг. 82.

по цѣнѣ и безупречныхъ по выполненію, являются нынѣ машины Однеровскаго типа по имени петроградскаго механика Однера. Изъ нихъ наиболѣе совершенной конструкціей обладаютъ такъ называемыя «Брунсвиги» (Гриммъ, Наталисъ и К°, Брауншвейгъ).

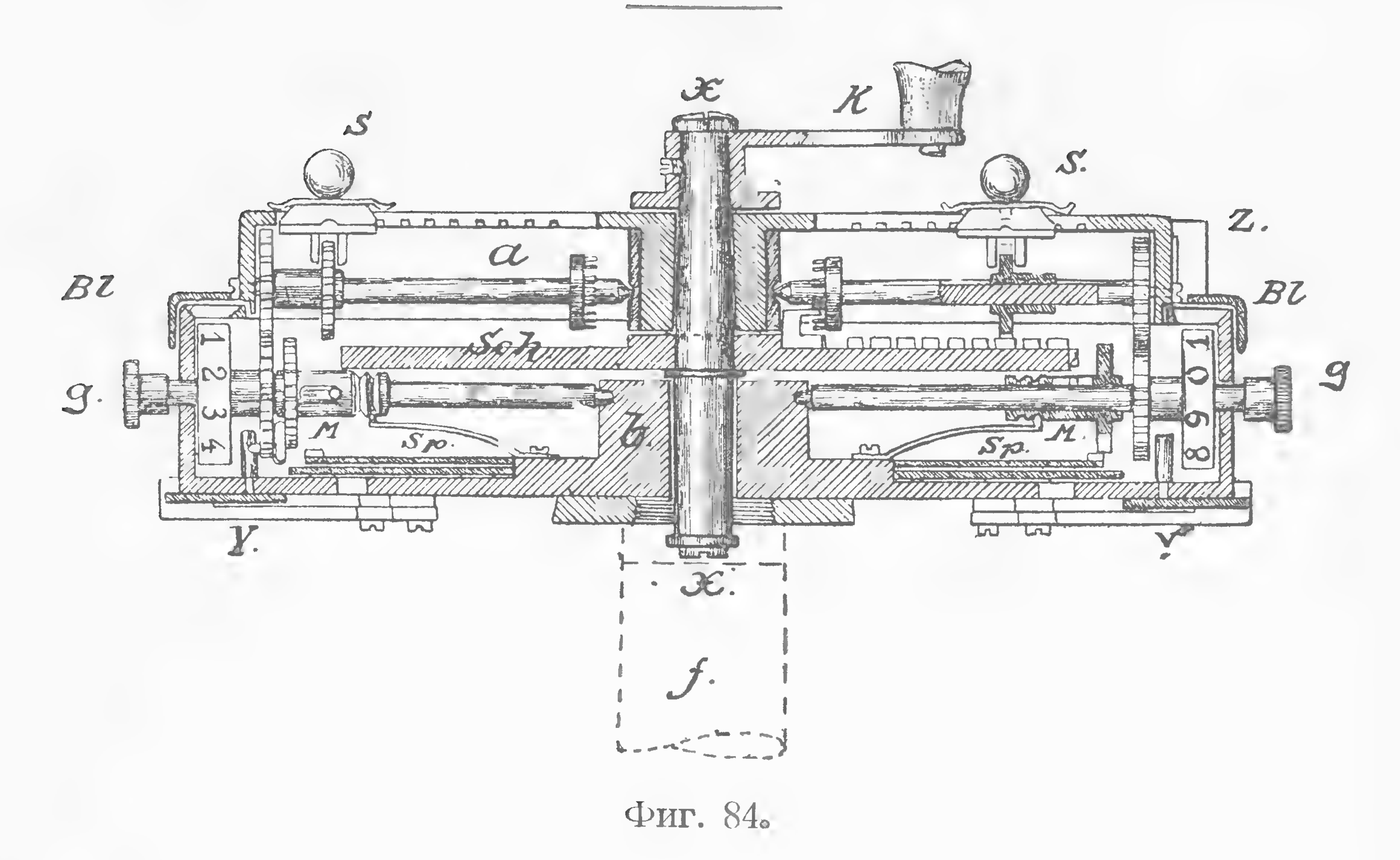
Главную особенность однеровскаго типа составляетъ устройство зубчатыхъ колесъ и весьма остроумное приспособленіе для быстраго умноженія и дѣленія, дѣйствующее помощью скользящаго механизма нижней части машины, благодаря которому вращеніе рукоятки и зубчатыхъ колесъ переводится, по волѣ работающаго, изъ нижнихъ регистровъ въ верхніе.



Фиг. 83.

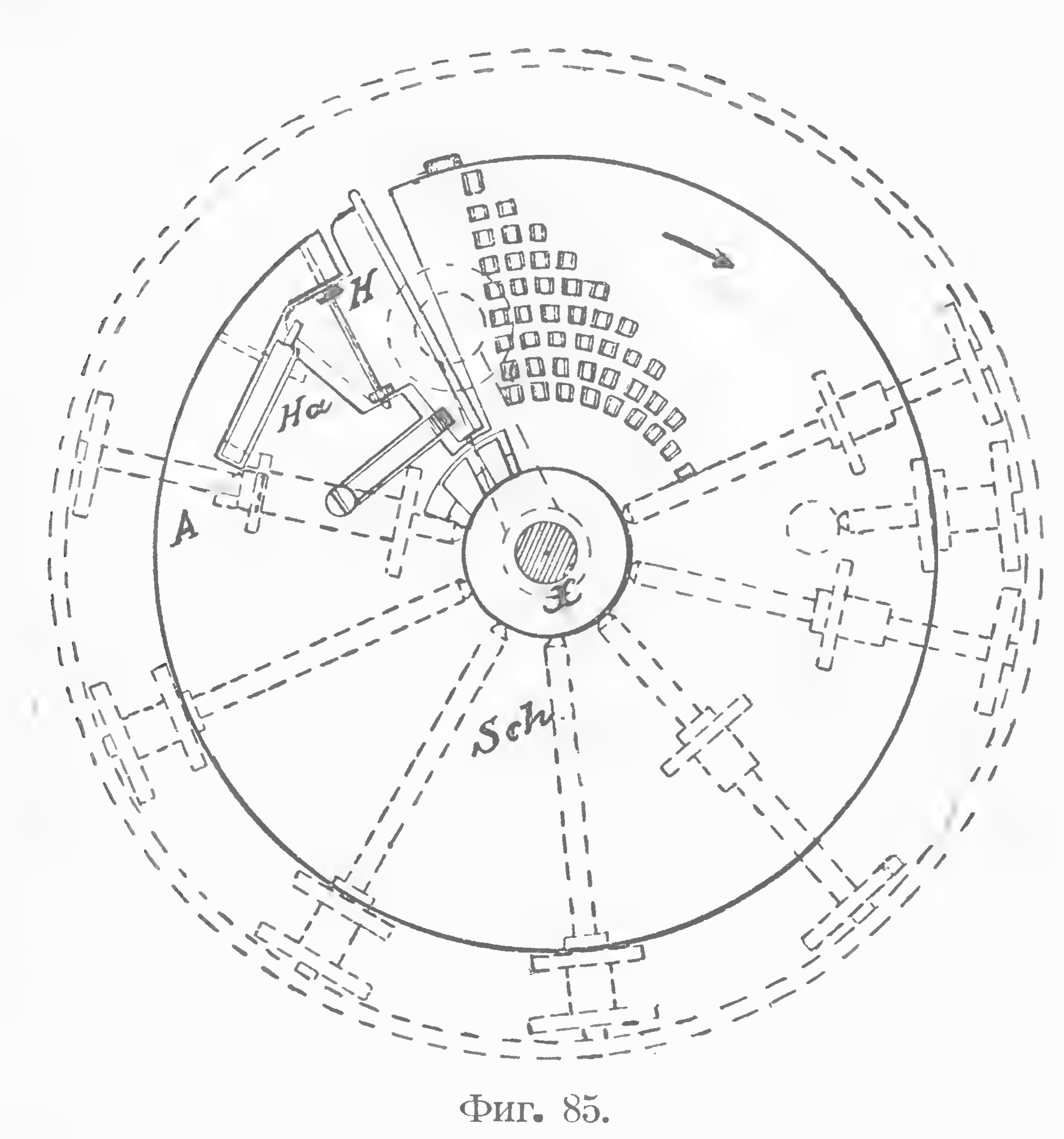
Зубцы колесъ въ машинахъ однеровскаго типа и, въ частности, въ «Брунсвигахъ» какъ бы временные, и, пока машина не работаетъ, скрыты въ толщѣ колеса. По волѣ работающаго на машинѣ, изъ числа зубцовъ выдвигаются установкой особаго рода рычаговъ или «спицъ» лишь столько, сколько соотвѣтствуетъ заданной цифрѣ. Благодаря такому остроумному устройству, весь промежуточный механизмъ машинъ Томасовскаго типа—дифференціальные колеса и валы, диски съ зубчатками—отпадаетъ, и колеса, соединенныя съ общей рукоятью, непосредственно дѣйствуютъ на цифрованные валики (фиг. 86).

На фиг. 87-й мы видимъ нормальнаго типа «Брунсвигу», съ рычагами или спицами, обозначенными пунктиромъ *h*. Значительно лучше рукоятки спицъ видны на «ариѳмотипѣ» Тринка (фиг. 78), построенномъ по типу «Брунсвиги».



Фиг. 84.

Скользящая часть нижняго затвора съ оконцами для результатовъ дѣйствій обозначена у «Брунсвиги» буквами «*ff*»;



Фиг. 85.

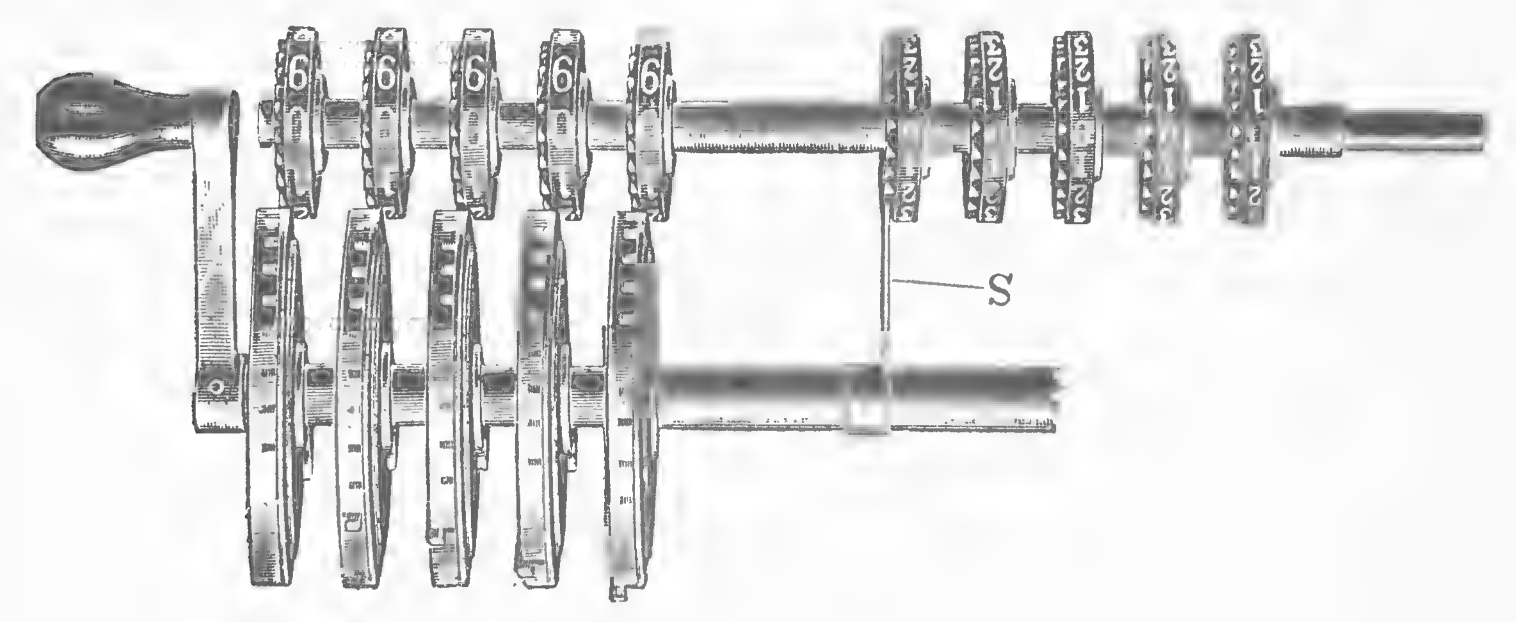
у «ариѳмотипа» буквами «*FF*». Кромѣ скользящаго затвора или салазокъ, новѣйшія «Брунсвиги» снабжены отдѣльной ру-

коятью» (рис. 88 и 89) для моментальной установки всѣхъ спицъ и показаній на ноль.

Обратимся теперь къ подробностямъ работы съ помощью «Брунсвиги».

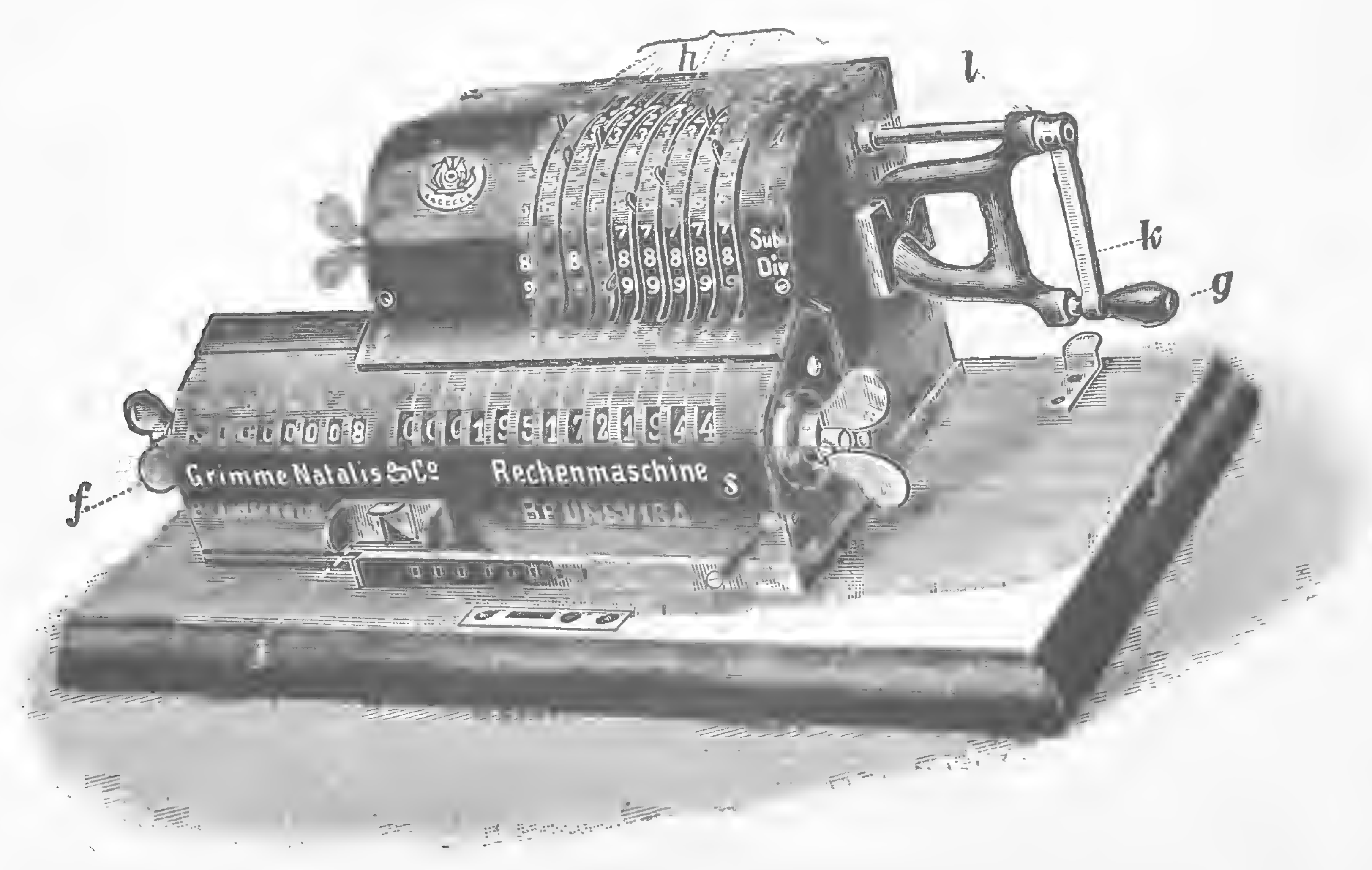
Положимъ надо найти сумму чиселъ 48 175 и 29 801.

Приводимъ всѣ показанія аппарата къ нулю и устанавливаемъ бѣлыя рукоятки спицъ (рис. 88) на цифры 5, 7, 1, 8, 4,



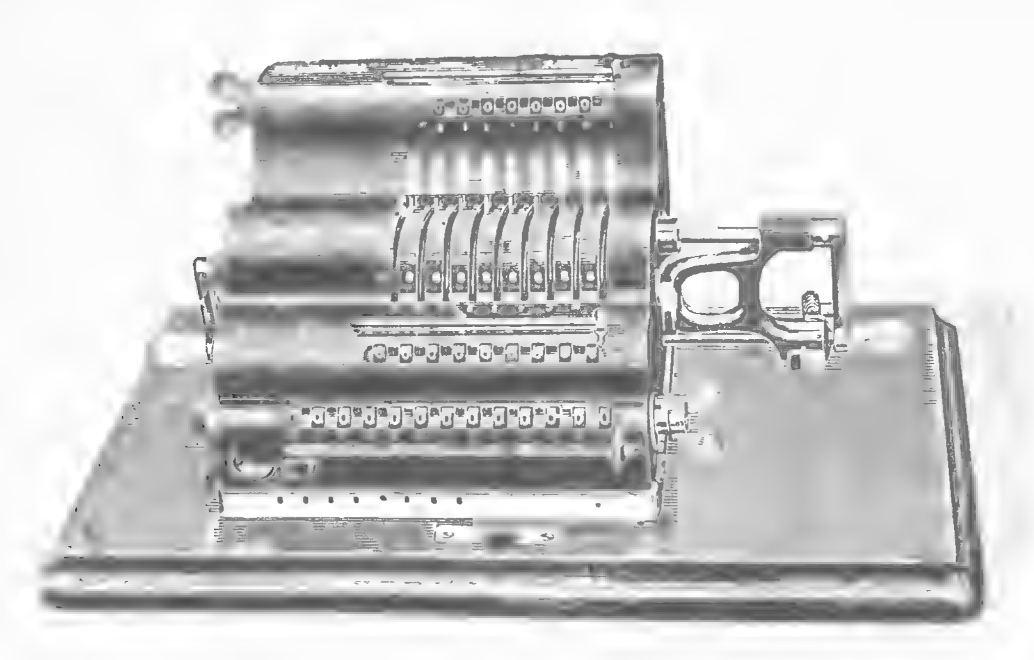
Фиг. 86

считая справа влѣво. Одинъ оборотъ главной рукояти и въ нижнемъ ряду отверстій появляется число 48 175. Затѣмъ устанавливаемъ спицы на другое слагаемое 29 801, и, послѣ новаго оборота главной рукояти, въ нижнемъ рядѣ отверстій выскакиваетъ сумма 77 976.



Фиг. 87.

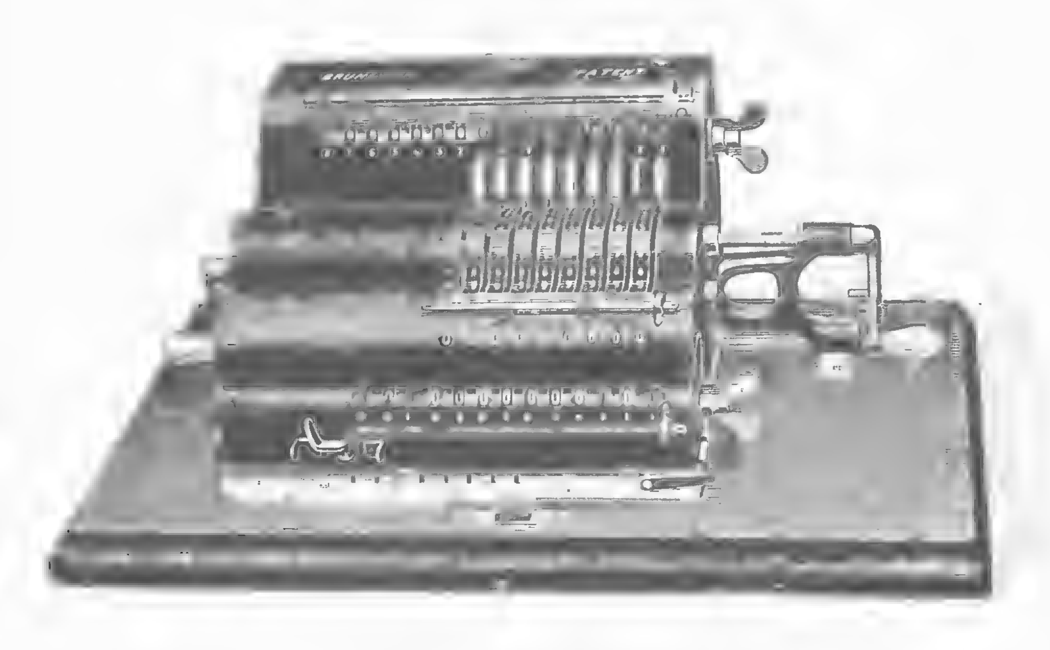
При вычитаніи вращаемъ главную рукоятку въ обратную сторону. Но есть машины, въ которыхъ рукоятка всегда вращается въ одну и ту же сторону; дѣйствія же вычитанія и дѣленія производятся надавливаніемъ на кнопку для обратнаго вращенія колесъ—подобно тому, какъ это дѣлается въ паровыхъ



Фиг. 88.

машинахъ помощью приспособленія, называемаго «кулиссой».

Умноженіе на однозначные множители производится «Брунсвигой» такъ же, какъ и машиною Паскаля: повтореніемъ сложенія 2, 3, 4 и т. д. до 9 разъ. Для множителей многозначныхъ имѣется скользящее приспособленіе въ нижней части машины, о которомъ уже упоминалось выше.



Фиг. 89.

Такъ, положимъ, что мы задались умножить на «Брунсвигѣ» 12 753 на 8 049. Какъ извѣстно, процессъ умноженія разлагается, математически, на рядъ послѣдовательныхъ умноженій, по формулѣ:

$$(12\,753 \times 8\,000) + (12\,753 \times 40) + (12\,753 \times 9).$$

То же дѣлаетъ и «Брунсвига»: Устанавливаютъ спицами число 12 753; перемѣщаютъ скользящее приспособленіе (салазки) съ нижнимъ рядомъ оконцевъ слѣва вправо такъ, чтобы цифра 3 множимаго пришлась противъ тысячнаго (четвертаго) оконца (считая справа влѣво) названнаго ряда и дѣлаютъ восемь оборотовъ главной рукоятью. Такимъ образомъ зубчатыя колеса, соединенныя съ главной осью, работаютъ въ тысячахъ и выше, а полученное произведеніе 102 024 имѣетъ справа три не введенныхъ въ оборотъ оконца, т. е. *три нуля.*

Затѣмъ передвигаютъ салазки справа влѣво такъ, чтобы цифра 3 множимаго пришлась противъ второго (десятковаго) оконца скользящей части машины, и поворачиваютъ рукоятку четыре раза. Полученное въ десяткахъ произведеніе $12\,753 \times 4 = 51\,012$ автоматически суммируется съ предыдущимъ и даетъ:

$$
\begin{array}{r}
10\,202\,4 \\
+\ 51\,012 \\
\hline
10\,253\,412 \text{ съ нулемъ справа.}
\end{array}
$$

Наконецъ, устанавливаютъ салазки въ нормальное положеніе, т. е. такъ, чтобы цифра 3 множимаго пришлась противъ перваго (единичнаго) оконца салазокъ, и поворачиваютъ рукоятку 9 разъ.

Послѣднее частное произведеніе немедленно, по мѣрѣ возникновенія, суммируется съ приведеннымъ выше и даетъ окончательный результатъ какъ бы въ такой формѣ:

$$
\begin{array}{r}
102\,534\,12 \\
+\ 114\,777 \\
\hline
102\,648\,897
\end{array}
$$

«Брунсвига» не даетъ, конечно, промежуточныхъ произведеній 510 120 и 114 777, а лишь первое, сумму перваго и второго и окончательное, въ такой послѣдовательности: 1) 102 024 000; 2) 102 534 120 и 3) 102 648 897.

Процессъ дѣленія сводится на «Брунсвигѣ» къ процессу вычитанія, повторенному столько разъ, сколько единицъ оказывается въ частномъ. Для сокращенія медлительнаго процесса пользуются опять салазками, заставляя зубчатыя колеса оси

работать послѣдовательно, отъ высшихъ разрядовъ къ низшимъ. Но установка салазокъ на высшую цифру частнаго не можетъ быть произведена самой машиною, автоматически, а требуетъ знакомства работающаго съ математическимъ процессомъ. Такъ онъ самъ долженъ, напримѣръ, сообразить, что при дѣленіи 8 147 255 на 6 375 можно заставить машину работать, начиная съ тысячъ; но при дѣленіи 4 875 111 на 5 037 слѣдуетъ начать съ сотенъ. Т. е., иначе говоря, въ первомъ случаѣ, прежде чѣмъ вращать рукоятку, надо установить неподвижную часть машины въ такое взаимное положеніе:

6 375
8 147 255

а во второмъ въ такое:

503 7
4 875 111

Ибо машина сама по себѣ отнюдь не мыслитъ и не соображаетъ, а лишь безупречно, съ недоступной для человѣка точностью, складываетъ, вычитаетъ и передаетъ влѣво наростающія единицы высшихъ порядковъ (при сложеніи и умноженіи).

Работа дѣленія на «Брунсвигѣ» идетъ въ такой послѣдовательности: послѣ установки, какъ выше, вращаютъ рукоятку до тѣхъ поръ, пока часть дѣлимаго, стоящая непосредственно подъ дѣлителемъ, не станетъ меньше дѣлителя. Въ оконцѣ, показывающемъ число оборотовъ рукоятки. получаемъ первую цифру частнаго, послѣ чего передвигаемъ салазки влѣво такъ, чтобы подъ дѣлителемъ стояла опять часть дѣлимаго, большая дѣлителя, но не свыше одной лишней цифры.

Такъ въ первомъ примѣрѣ:

6 375
8 147 255

послѣ перваго же оборота получается:

6 375
1 772 255

и въ контрольномъ оконцѣ числа оборотовъ цифра 1.

Перемѣщаемъ салазки въ положеніе:

637 5
1 772 255

Послѣ двухъ новыхъ оборотовъ устанавливаются числа:

637 5
497 255

а въ контрольномъ оконцѣ цифра 2.



Фиг. 90.

Перемѣщаемъ салазки въ положеніе:

63 75
497 255

дѣлаемъ семь оборотовъ рукоятью; читаемъ на машинѣ:

63 75
51 005

Перемѣщаемъ салазки влѣво такъ:

6 375
51 005

и, послѣ восьми оборотовъ рукоятки, получаемъ:

6 375
5

Контрольныя оконца даютъ готовое частное 1 278, а салазки остатокъ 5.

Быстрота самыхъ сложныхъ вычисленій на «Брунсвигѣ» изумительна; въ машинахъ, не имѣющихъ контрольныхъ оконцевъ для числа оборотовъ, надо вести имъ счетъ отдѣльно, записями на бумажкѣ или матовомъ стеклѣ.

Впрочемъ, человѣческая изобрѣтательность пошла еще дальше. Существуютъ машины, обезпечивающія впередъ необходимое для производимаго дѣйствія число оборотовъ механизма, при *одномъ* лишь оборотѣ рукояти. Такъ въ машинѣ «Милліонеръ», — построенной по типу Томасовскихъ машинъ (фиг. 90 и 91). имѣется для этой цѣли



Фиг. 91.

особый рычагъ (фиг. 91, въ верхнемъ углу слѣва), установкой котораго на ту или на другую цифру обезпечивается соотвѣтствующее число оборотовъ механизма при каждомъ оборотѣ рукояти. Очевидно, что для сложенія и вычитанія рычагъ долженъ устанавливаться на 1.

Изъ машинъ съ клавишами вмѣсто спицъ лучшія—машины Пайка («Pike», фиг. 92), въ основѣ которыхъ, какъ и «Брунсвиги», лежитъ Однеровскій принципъ.



Фиг. 92.

Онѣ чрезвычайно напоминаютъ общераспространенныя пишущія машины и, подобно имъ, отпечатываютъ на бумагѣ наигранныя на клавишахъ и переданныя рукоятью печатающему механизму цифры и итоги дѣйствій.

Но безъ одухотворенной разумной мыслью работы человѣка всѣ подобныя машины, всетаки, не болѣе, какъ мертвый наборъ колесъ и рычаговъ: онѣ не въ состояніи *сами* рѣшать хотя бы наиболѣе простыя ариѳметическія задачи. Назначеніе ихъ—облегчать и выполнять механическую долю труда.

Охватить сразу, хотя бы бѣглымъ взглядомъ, все творчество, проявленное человѣчествомъ съ цѣлью ускоренія и облегченія механизма однихъ только точныхъ вычисленій, не легко; и на предыдущихъ страницахъ мы пока остановили вниманіе читателя преимущественно на тѣхъ счетныхъ аппаратахъ, которые пользовались или пользуются теперь наибольшимъ распространеніемъ для практическихъ приложеній. Но, съ одной стороны, всѣ эти машины еще далеко не составляютъ послѣдняго слова въ области достижимаго, а съ другой, читатель справедливо могъ бы посѣтовать на то, что въ исторіи (хотя бы бѣглой) изобрѣтенія счетныхъ машинъ нами опущены имена и попытки, заслуживающія самаго серьезнаго вниманія. Поэтому къ изложенному сдѣлаемъ еще кое-какія дополненія.

Замѣтимъ прежде всего, что основная задача точныхъ вычисленій разрѣшается по преимуществу четырьмя главными способами: *графическимъ (геометрическимъ)*, *динамическимъ*, *кинематическимъ* и *электрическимъ*.

Графическій методъ.– Палочки Непера.

Изъ счетныхъ аппаратовъ, основанныхъ на графическомъ методѣ, прежде всего необходимо вспомнить о Неперовскихъ палочкахъ. Джонъ Неперъ, баронъ Маркистонъ, знаменитый изобрѣтатель логариѳмовъ, носящихъ его имя, предложилъ остроумный способъ механическаго умноженія и дѣленія. Способъ этотъ описанъ въ его сочиненіи «Рабдологія», изданномъ въ 1617 году,—годъ смерти самого Непера.

Цифровая таблица, изображенная на фиг. 93-й, представляетъ таблицу Пиѳагора, помѣщенную на десяти палочкахъ или дощечкахъ. Лѣвая пластинка неподвижна, всѣ же остальныя могутъ передвигаться и перемѣщаться всячески. Каждый изъ квадратиковъ таблицы раздѣленъ діагональю на два треугольника. Въ нижнемъ треугольникѣ находится цифра единицъ произведеній таблицы умноженія, а въ верхнемъ, налѣво, цифра десятковъ. Предположимъ теперь, что рядомъ съ неподвижной лѣвой линеечкой помѣщены послѣдовательно линеечки, имѣющія сверху цифры **7**, **5** и **8**. Въ такомъ случаѣ нетрудно почти моментально получить произведеніе изъ **758** на всякое число отъ **1** до **9**.

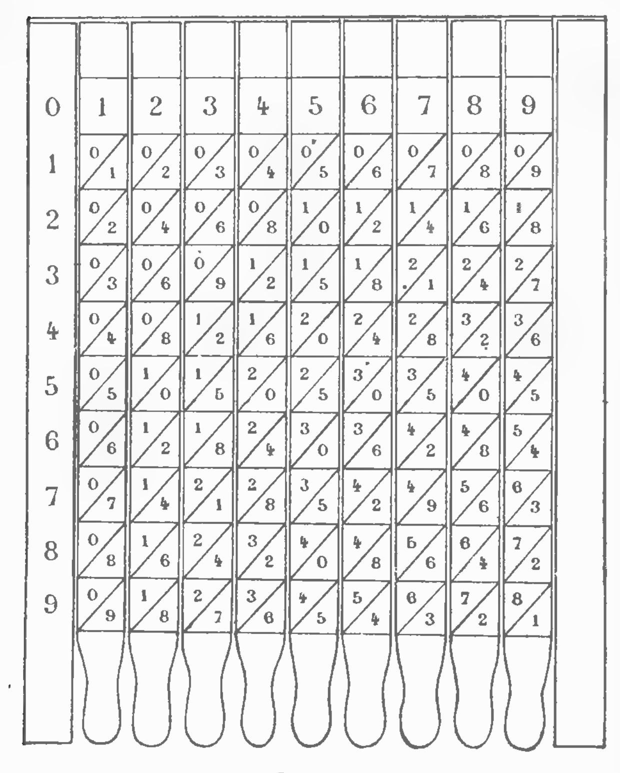
Такъ, напримѣръ, желая умножить это число **758** на 6, мы смотримъ на неподвижную линейку и въ данномъ случаѣ противъ числа 6 по горизонтальному направленію находимъ:

$$6\ \Big|{}^{4}\!/_{2}\Big|{}^{3}\!/_{0}\Big|{}^{4}\!/_{8}\Big|$$

Сложимъ числа параллельно діагоналямъ треугольничковъ, находимъ:

$$4,\ 2+3,\ 0+4,\ 8$$

т. е. число **4 548**, которое и есть произведеніе числа **758** на **6**.



Фиг. 93.

Такимъ образомъ Неперовы палочки позволяютъ очень быстро находить частныя произведенія любого числа на любую изъ первыхъ девяти цифръ, при чемъ не требуется знанія таблицы умноженія. Дѣйствіе умноженія сводится къ сложенію, а дѣленіе къ вычитанію, при чемъ не требуется дѣлать

никакихъ пробъ. Очевидно, что чѣмъ болѣе числа, тѣмъ болѣе ускоряется работа при помощи Неперовыхъ палочекъ или линеекъ, хотя слѣдуетъ признать, что описаный счетный аппаратъ Непера самъ по себѣ далеко уступаетъ другому его великому открытію—логариѳмамъ.

Изъ послѣдователей и усовершенствователей системы Непера слѣдуетъ упомянуть о счетчикѣ Тронсета, о счетчикѣ Прюво Ле Гюэ (Pruvost Le Guay) и о Неперовскихъ кругахъ Кинемана (Quinemant). Графическій способъ счисленія въ послѣднее время въ особенности усовершенствованъ Женайлемъ (Genaille), который, по авторитетному свидѣтельству Люка, вполнѣ разрѣшилъ задачу устройства прибора для точныхъ вычисленій посредствомъ геометрическаго метода.

Динамическій методъ.

Начало приложенія къ счисленію динамическаго метода было положено Паскалемъ. Какъ видно изъ предыдущаго, этотъ способъ механическаго точнаго счета имѣетъ пока наибольшее число послѣдователей и изобрѣтателей. Наибольшей извѣстностью въ дѣлѣ устройства машинъ этого типа пользуются имена Рота, Томаса, Однера, Барбура, Мореля, Жайе, Гранта и мн. другихъ, упомянутыхъ уже нами въ своемъ мѣстѣ. Имена же англичанина Баббеджа и шведа Шейца знатоками вопроса произносятся съ особымъ уваженіемъ. Чарльзъ Баббэджъ всю свою жизнь и все свое состояніе посвятилъ на устройство универсальнаго счетчика, дающаго послѣдовательные члены ариѳметическихъ прогрессій какихъ угодно порядковъ. Устройствомъ своей машины онъ успѣлъ заинтересовать англійское правительство, которое выдало Баббэджу денежную помощь, но изобрѣтатель умеръ, не закончивъ устройства своей машины.

Георгъ Шейцъ, издатель техническаго журнала въ Стокгольмѣ въ серединѣ прошлаго столѣтія, и сынъ его Эдуардъ Шейцъ осуществили замыселъ Баббэджа. Благодаря денежной поддержкѣ стокгольмской академіи наукъ и шведскаго короля, они устроили счетную машину, служившую предметомъ уди-

вленія самого Баббэджа на парижской выставкѣ 1855 года. Машина эта была пріобрѣтена американцемъ Ратбономъ (Rathbone) и принесена имъ въ даръ обсерваторіи Дюдлея въ Альбани. Другой экземпляръ былъ сдѣланъ для англійскаго правительства и облегчаетъ вычисленія англійскаго «Морского календаря» (Nautical Almanac).

Машина имѣетъ видъ небольшого піанино и операціи съ ней не болѣе сложны, чѣмъ на шарманкѣ. Простымъ поворотомъ рукоятки получаются послѣдовательные члены ариѳметическихъ прогрессій перваго, второго, третьяго и даже четвертаго порядка. Кромѣ того полученные результаты стереотипируются и могутъ быть отданы въ печать. Съ помощью этой машины чрезвычайно удобно издавать таблицы логариѳмовъ, синусовъ и синусъ-логариѳмовъ, не содержащія въ себѣ никакихъ ариѳметическихъ или типографскихъ ошибокъ. Машина высчитываетъ и стереотипируетъ въ часъ 120 строкъ, готовыхъ къ печати. Сравнительные опыты доказали, что машина даетъ двѣ съ половиной страницы въ то время, которое потребно опытному составителю, чтобы заполнить цифрами одну только страницу.

Кинематическій методъ.

Кинематическое рѣшеніе задачи предложено нашимъ знаменитымъ соотечественникомъ, нынѣ покойнымъ, академикомъ Чебышевымъ. Во всѣхъ вышеописанныхъ машинахъ динамическаго типа движенія неровны и прерывчаты. Во время поворота рукоятки каждая шестерня движется по своему: однѣ останавливаются въ то время, какъ другія еще продолжаютъ движеніе, и т. д. Нашъ знаменитый ученый устроилъ машину съ непрерывными и однообразными движеніями. Въ его ариѳметической машинѣ дѣйствіе, заключающееся въ прибавленіи 1 къ 999 999 не сложнѣе дѣйствія прибавленія 1 къ 000 000. Кромѣ того въ ней нѣтъ никакихъ пружинъ, а потому исключается возможность ошибокъ при вычисленіи. Въ настоящее время существуетъ всего одинъ экземпляръ этой машины. Между тѣмъ при нѣкоторыхъ поправкахъ она можетъ быть наилучшей изъ всѣхъ существующихъ нынѣ счетныхъ машинъ.

Электрическій методъ.

Мысль объ устройствѣ *электрической счетной машины* принадлежитъ уже упомянутому нами Женайлю (Genaille). Но труды этого несомнѣнно геніальнаго изобрѣтателя, къ сожалѣнію, не нашли достойной оцѣнки и поддержки въ свое время какъ со стороны ученыхъ и общественныхъ учрежденій, такъ и со стороны частныхъ лицъ.

Цифрарь-діаграммометръ В. С. Козлова.

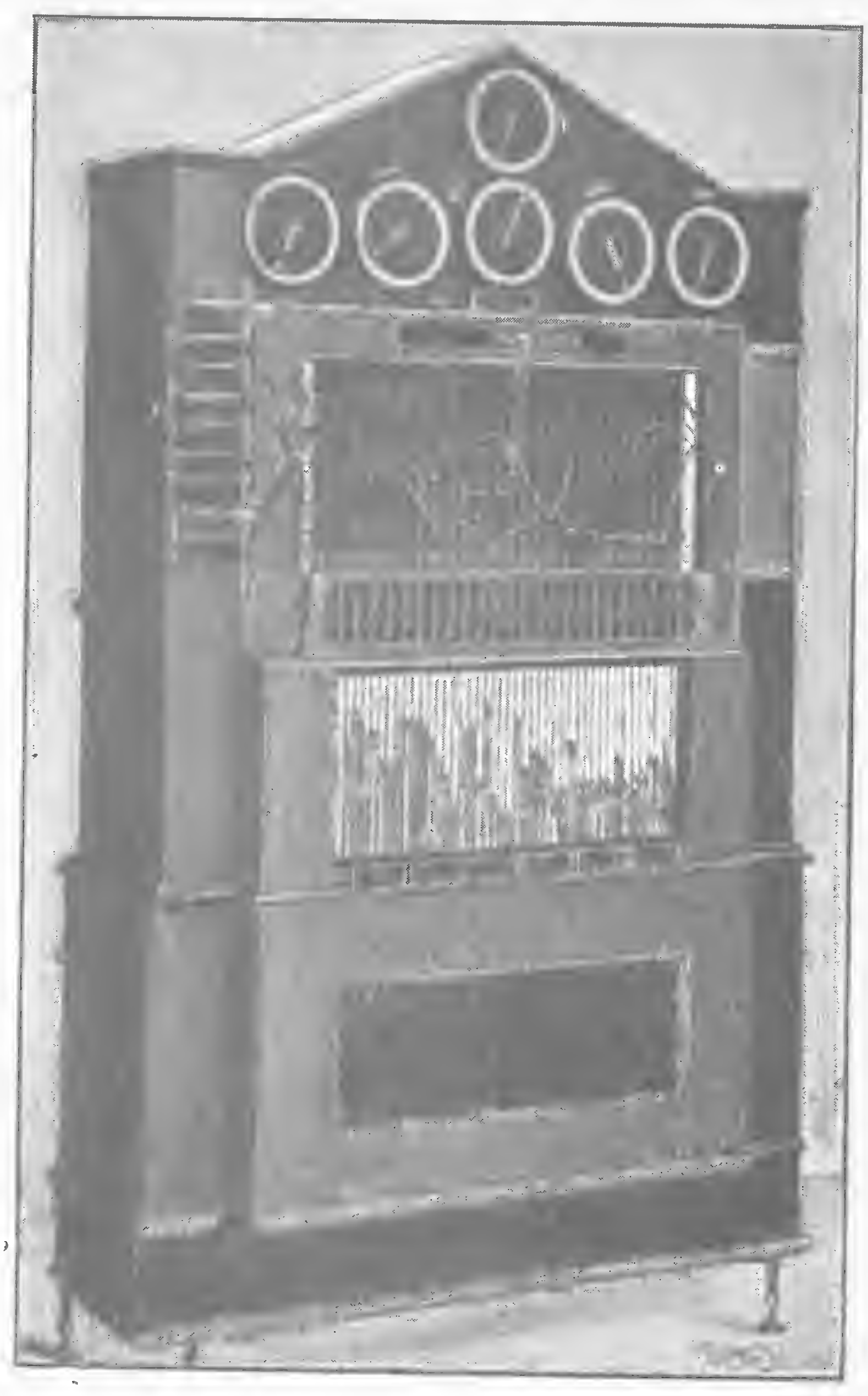
Въ числѣ новѣйшихъ изобрѣтателей счетныхъ машинъ необходимо указать и на аппаратъ нашего соотечественника В. С. Козлова, о которомъ безвременно скончавшійся Э. Люка прочелъ публичную лекцію въ 1890 году въ парижскомъ національномъ музеѣ искусствъ и ремеслъ. Изображенія цифраря-діаграммометра г. Козлова даны у насъ на фиг. 94 и 95.

Извѣстные до сего времени счетные аппараты и такъ называемые *интеграторы* обыкновенно служатъ для одного какого-либо опредѣленнаго дѣйствія или для однихъ какихъ-либо вычисленій. Основная же идея изобрѣтенія г. Козлова состоитъ въ томъ, что позволяетъ удобно одновременно получать разрѣшеніе различныхъ проблемъ, относящихся къ измѣренію различныхъ элементовъ кривой или діаграммы. Изобрѣтеніе это состоитъ изъ двухъ частей: діаграммографа и діаграммометра.

Діаграммографъ представляетъ собою расположенную на вертикальной плоскости таблицу, на которой начерчены горизонтальныя равноотстоящія другъ отъ друга линіи. Передъ таблицей находятся свободно двигающіяся вертикально шнуры съ кольцами, въ которыхъ ходятъ цвѣтные шнуры (Можно употреблять вмѣсто шнуровъ металлическіе кулисы или скользящія застежки). Подымая и опуская кольца, можно изобразить на таблицѣ любую кривую,—соотвѣтственно системѣ координатъ аналитической геометріи Декарта.

Нити, занумерованныя слѣва направо, представляютъ абсциссы 1, 2, 3... *n*, а различныя высоты колецъ, по отношенію ихъ къ любой горизонтальной линіи на таблицѣ, пред-

ставляютъ ординаты, которыя мы обозначимъ y_1, y_2, y_3 ... y_n. Шнурокъ, предварительно проведенный во всѣ кольца, позво-

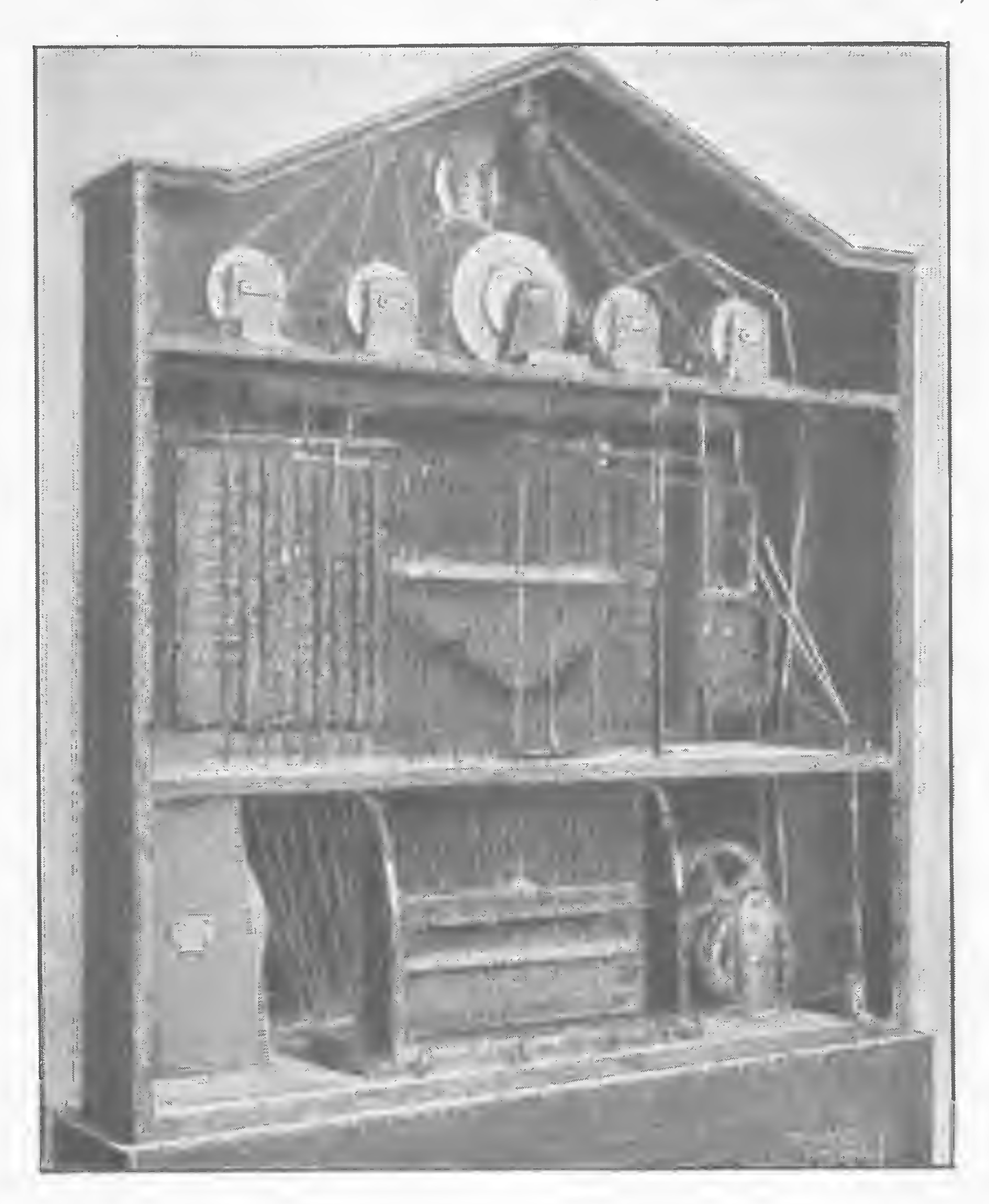


Фиг. 94.—Видъ цифраря-діаграммометра
В. С. Козлова спереди.

ляетъ изображать мгновенно діаграмму, соотвѣтствующую даннымъ наблюденіямъ.

Такимъ образомъ, можно по желанію воспроизводить чертежи

и діаграммы всякаго рода. Если мы примемъ за абсциссы время, измѣряемое минутами и секундами, то ординаты могутъ изобразить траекторію метательнаго снаряда, движенія свѣтилъ,



Фиг. 95. — Видъ механизма цифраря-діаграммометра.

расширенія и температуры тѣлъ и вообще всѣ явленія, зависящія отъ времени. Принимая же для выраженія абсциссами часы дня, мы можемъ изобразить ординатами — температуру, барометрическое давленіе, гигрометрическое состояніе, быстроту

вѣтра и его направленіе, пульсъ и температуру больныхъ и пр. Если же принять за абсциссы дни мѣсяца, мѣсяцы года, годы столѣтія, то мы можемъ ординатами изобразить курсы биржи и финансовыхъ цѣнностей, приходы и расходы негоціантовъ, ежедневныя температуры и среднія давленія, урожай, цѣны на хлѣбъ и различныя статистическія свѣдѣнія о рождаемости, смертности и т. д. Словомъ, діаграммографъ даетъ возможность быстро изображать графически различныя цифровыя наблюденія, относящіяся къ изученію явленій въ области физическихъ наукъ или въ статистикѣ.

Это собственно *феноменографъ*, т. е. настоящій наглядный выразитель явленій.

Діаграммометръ есть измѣрительный аппаратъ, дающій возможность при помощи *взвѣшиванія* быстро вычислять различные элементы діаграммы или кривой, отвѣчающей какимъ-либо цифровымъ наблюденіямъ.

Описываемый аппаратъ представляетъ собою лишь попытку совмѣстить разнообразныя пособія, которыя могутъ быть выдѣлены и приспособлены къ спеціальнымъ требованіямъ. Тѣмъ не менѣе, этотъ аппаратъ, при его весьма остроумномъ основномъ принципѣ, даетъ возможность исчислить быстро и одновременно очень значительное количество интеграловъ. Аппаратъ этотъ является *всеобщимъ счетнымъ инструментомъ* для инженера, физика, химика, статистика, банкира и промышленника [1]).

Общее заключеніе, которое Э. Люка высказалъ объ аппаратѣ г. Козлова, таково:

«Теперешняя модель діаграммометра, или точнѣе феноменографа, не вошла еще въ область обыденной практики, но мы думаемъ, что этотъ аппаратъ можетъ быть утилизированъ и имъ будутъ пользоваться въ разныхъ формахъ, приспособленныхъ къ тѣмъ или другимъ требованіямъ экспериментаторовъ.

---

[1]) До сихъ поръ извѣстны были только два счетныхъ аппарата, дѣйствующіе при помощи взвѣшиванія. Одинъ изъ нихъ: ариѳметическіе вѣсы Balance Arithmétique) Кассини (Cassini), описанные въ «Собраніи машинъ академіи (парижской) наукъ» (до 1699), и другой—подъемный мостъ, построенный по системѣ генерала Понселе, который можно видѣть въ укрѣпленіи Mont Valérien, близъ Парижа.

Стоимость изготовленія діаграммометра, съ его цѣпями и вѣсами, можетъ быть доступна всѣмъ. Настоящая модель діаграммометра есть только *временная оболочка* (enveloppe temporaire) геніальной идеи г. Козлова. Я полагаю также, что удобнѣе было бы замѣнить рычажные вѣсы пружинными (des dynamomètres). Наконецъ, слѣдовало бы измѣнить способы расположенія циферблатовъ-измѣрителей такъ, чтобы получать одновременно измѣренія разныхъ кривыхъ для одной и той же діаграммы. Необходимо, чтобы стрѣлки циферблатовъ могли показывать въ каждый моментъ не только различныя среднія, соотвѣтствующія всей серіи ординатъ, но также и различныя среднія, или ихъ суммы, для любого числа начальныхъ ординатъ. При этомъ способѣ можно было бы изображать на нижнемъ діаграммографѣ результаты по мѣрѣ ихъ полученія (или записывать ихъ на бумагѣ), образуя потомъ изъ нихъ новыя діаграммы, получать новыя опредѣленія и послѣдовательные интегралы,—двойные, тройные и кратные.

«Мы не можемъ опредѣлить заранѣе степени приближенія вычисленій, которыя даетъ діаграммометръ; но при примѣненіи его можно достигнуть послѣдовательныхъ приближеній.

«На этомъ аппаратѣ можно получать формулы Симпсона (Simpson), Понселе (Poncelet) и генерала Пармантье (Parmentier) и вообще всѣ формулы квадратуры. О значеніи аппарата можно легко судить изъ того, что даетъ намъ каждый изъ пяти измѣрителей относительно точности вычисленія. Чтобы провѣрить вычисленія, достаточно повторить тотъ же примѣръ въ противоположномъ направленіи, т. е. поставивъ ряды ординатъ справа налѣво послѣ того, какъ они были поставлены слѣва направо. Тогда, при точномъ дѣйствіи аппарата, первые четыре измѣрителя должны будутъ показать тѣ же результаты, что и ранѣе, а пятый—результаты дополнительные.

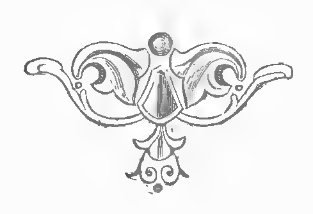
«По совѣту г. Марея (Marey), г. Козловъ полагаетъ примѣнить свой аппаратъ еще для измѣренія кривыхъ въ пространствѣ».

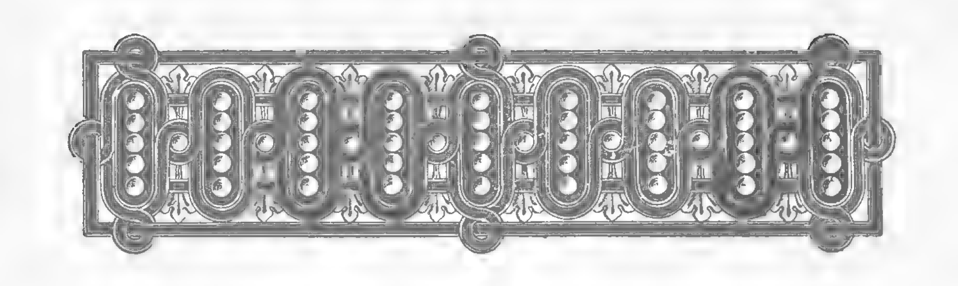
Пожелаемъ нашимъ соотечественникамъ-изобрѣтателямъ полнаго успѣха въ дѣлѣ, начатомъ столь блистательно.

Приближенныя вычисленія.

Пособіями для приближенныхъ вычисленій служатъ, съ одной стороны, логариѳмическія таблицы, а съ другой, графическіе методы. Линейка для вычисленій, изобрѣтенная Гюнтеромъ въ 1624 году, была съ теченіемъ времени значительно усовершенствована. Въ настоящее время она употребляется при занятіяхъ почти постоянно. Наибольшаго вниманія изъ такихъ линеекъ заслуживаютъ линейки Лаланна (Lalanne) и Маннгейма (Mannheim), изготовляемыя Тавернье-Граве (Tavernié-Gravet). Пользуются также для вычисленій кругами, подобными кругамъ Буше (Bouché), Рено-Таше (Renaud-Tachet) и Кинемана (Quinemant) и др.

Существуютъ также абаки, треугольники, прямоугольники и лекалы для вычисленій. Изъ русскихъ изданій подобнаго рода назовемъ хотя бы Д. Левитуса: «Счетный масштабъ»— графическая таблица для умноженія, дѣленія, возведенія въ степень, извлеченія корней и для тригонометрическихъ вычисленій.





Комбинаторика.

Ниже приведено нѣсколько простыхъ задачъ, на рѣшеніе которыхъ мы совѣтовали бы читателю обратить особое вниманіе. Несмотря на свою простоту, эти задачи могутъ служить полезнымъ введеніемъ въ новыя весьма обширныя и чрезвычайно интересныя области необъятнаго «Царства Смекалки». Мы говоримъ о такъ называемой *Теоріи Соединеній*, или *Анализъ Соединеній* (Analyse Combinatoir). Болѣе коротко и, пожалуй, удачно эту область математики называютъ однимъ словомъ: *Комбинаторика*. Надъ разработкой вопросовъ, связанныхъ съ этими областями математическихъ знаній, трудились еще древніе индусы. Но только послѣ безсмертныхъ изслѣдованій европейцевъ Галилея, Паскаля, Ферма и ихъ продолжателей выяснилось, какое тонкое, остроумное и вмѣстѣ могущественное оружіе для ума даетъ Комбинаторика. Прежде всего очевидно, что всякаго рода комбинаціи — соединенія и сочетанія — постоянно встрѣчаются въ различныхъ играхъ. И дѣйствительно, о Теоріи Соединеній, какъ и о *Теоріи Вѣроятностей*, не безъ основанія говорятъ, что онѣ родились и выросли за игорнымъ столомъ. Мы убѣдимся потомъ, однако, что. удовлетворивъ малоцѣнное любопытство игроковъ, теоріи эти обогатили человѣчество уже не «игрецкими», а совсѣмъ серьезными и полезными для всѣхъ знаніями и методами.

Задача 36-я.

Размѣщеніе пассажировъ.

Четверо пассажировъ входятъ въ вагонъ, въ которомъ 6 свободныхъ мѣстъ. Сколькими способами они могутъ размѣститься.

Рѣшеніе.

Первый пассажиръ можетъ занять любое изъ 6-ти мѣстъ. Значитъ, второй — любое изъ 5-ти мѣстъ; третій — любое изъ 4-хъ мѣстъ и четвертый — любое изъ трехъ. Каждое изъ такихъ размѣщеній можно сочетать съ каждымъ изъ остальныхъ, и искомое число, слѣдовательно, будетъ:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Задача 37-я.

Разнообразіе костюмовъ.

Господинъ имѣетъ 5 брюкъ, 8 жилетовъ и 7 сюртуковъ. Въ сколькихъ различныхъ костюмахъ можетъ онъ появляться?

Рѣшеніе.

Каждая изъ частей костюма можетъ всѣми способами сочетаться съ каждыми изъ остальпыхъ. Всего же получится $5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$ различныхъ комбинацій.

Задача 38-я.

Выборъ предметовъ.

Сколькими способами можно сдѣлать выборъ, если брать по нѣсколько или всѣ изъ n данныхъ предметовъ?

Рѣшеніе.

Съ каждымъ предметомъ можно поступить двояко: или брать его, или не брать. Каждый подобный способъ обращенія съ однимъ предметомъ можно сочетать съ каждымъ способомъ обращенія съ каждымъ изъ остальныхъ предметовъ. Значитъ, искомое число было бы $2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2$ (n множителей) $= 2^n$. Но отсюда надо исключить случай, когда *не берутъ ни одного предмета*. Итакъ, искомое число есть $2^n - 1$.

Задача 39-я.

Имѣя 6 пріятелей, сколькими способами можно пригласить ихъ на обѣдъ, приглашая или всѣхъ, или нѣкоторыхъ?

Рѣшеніе.

Задача, очевидно, есть частный случай предыдущей, искомое число есть $2^6 - 1 = 63$.

Задача 40-я.

Сколькими способами n предметовъ могутъ быть розданы p лицамъ, если относительно числа вещей которое можетъ получить каждый, нѣтъ никакихъ ограниченій.

Рѣшеніе.

Каждая вещь имѣетъ p назначеній. Слѣдовательно, искомое число есть p^n.

Задача 41-я.

Сколькими способами 5 вещей могутъ быть распредѣлены между 2-мя лицами?

Рѣшеніе.

Первая вещь можетъ быть дана либо одному, либо другому лицу, вторая также и т. д. Значитъ, получается 2^5 способовъ. Но изъ этого числа надо исключить 2 случая, когда только то

или другое лицо получаетъ всѣ 5 вещей. Исключая эти 2 случая, находимъ, что число способовъ есть $2^5 - 2 = 30$.

Задача 42-я.

Имѣется 3 орѣха, 4 яблока и 2 апельсина. Сколько будетъ комбинацій для выбора, если предлагаютъ взять, по меньшей мѣрѣ, по одной штукѣ каждаго лакомства?

Рѣшеніе.

Предлагается взять одинъ или болѣе орѣховъ, одно или болѣе яблокъ, одинъ или болѣе апельсиновъ. Изъ предыдущихъ задачъ мы уже знаемъ, что выборъ каждаго рода соотвѣтственно будетъ $2^3 - 1 = 7$, $2^4 - 1 = 15$, $2^2 - 1 = 3$. Каждый выборъ одного рода комбинируется съ каждымъ выборомъ другихъ родовъ. Искомое число, значитъ, равно $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$.

Задача 43-я.

Сколько словъ о четырехъ буквахъ можно составить изъ 17-ти согласныхъ и 5-ти гласныхъ, если въ серединѣ должны находиться двѣ различныя гласныя, а по краямъ по одной согласной, которыя могутъ быть или одинаковы, или различны?

Рѣшеніе.

Ясно, что первое мѣсто въ требуемыхъ словахъ замѣщается 17-ю различными способами. Столькими же способами замѣщается и послѣднее мѣсто, ибо согласныя, по условію задачи, могутъ повторяться. Съ другой стороны, можно разсчитать, что изъ 5-ти гласныхъ, беря ихъ по двѣ различныхъ, можно получить $5 \cdot 4 = 20$ различныхъ комбинацій. Такимъ образомъ, искомое число требуемыхъ словъ $= 17 \cdot 17 \cdot 20 = 5\,780$.

Задача 44-я.

На улицахъ города.

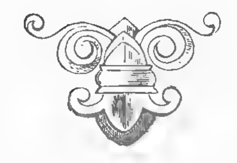
Улицы города расположены на подобіе линій шахматной доски, при этомъ m улицъ идетъ съ сѣвера

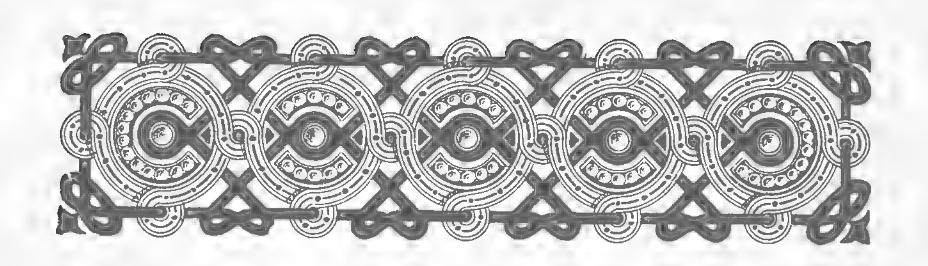
на югъ, а n съ востока на западъ. Сколькими путями можно пройти отъ сѣверо-западнаго угла на юго-восточный, идя возможно кратчайшимъ путемъ.

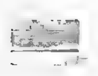
Рѣшеніе.

Нужно пройти $m+n-2$ участка,—именно: $m-1$ участокъ съ запада на востокъ и $n-1$ участокъ съ сѣвера на югъ. Различныхъ путей получится столько, сколькими способами можно $m-1$ предметъ выбрать изъ числа $m+n-2$ предметовъ. Значитъ искомое число равно

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ (m+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ (m-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots\ (n-1)}.$$







Теорія соединеній.



Перестановки, размѣщенія и сочетанія.

Анаграммы.

Напишемъ какое-нибудь слово и станемъ всячески переставлять составляющія его буквы. Если при такихъ перестановкахъ получится новое слово (состоящее, конечно, изъ тѣхъ же буквъ, что и первоначальное, только въ другомъ порядкѣ), то, значитъ, мы получимъ *анаграмму*. Такъ, напр., возьмемъ слово **жар**, состоящее изъ трехъ буквъ, если не считать твердаго знака. Переставляя всѣми возможными способами составляющія это слово буквы. мы получимъ 6 слѣдующихъ комбинаціи:

жар *раж*
ржа *жра*
арж *ажр*

Разсматривая 6 полученныхъ перестановокъ изъ 3-хъ буквъ, мы видимъ, что изъ слова *жар* получается анаграмма *ржа*. Можно, пожалуй, прибавить сюда и *раж*, такъ какъ это слово въ выраженіи «вошелъ въ ражъ» получило большое распространеніе въ нашемъ обиходномъ языкѣ. Остальныя же три перестановки (ажр, жра, арж) буквъ надо отбросить, какъ ничего на говорящія нашему слуху и сознанію.

Точно также, напр., изъ слова *лиса* путемъ перестановки буквъ можно получить слово *сила*. Изъ слова *кипа* составляются анаграммы *пика* и *паки;* изъ слова *Москва* получается *смоква*. Весьма употребительныя въ математикѣ слова *логариѳмъ* и *алгориѳмъ* тоже анаграмматичны, т. е. состоятъ изъ тѣхъ же буквъ, только переставленныхъ въ иномъ порядкѣ, и т. д. Примѣровъ можно подобрать сколько угодно. Развлеченія съ анаграммами принадлежатъ къ самымъ общеизвѣстнымъ и распространеннымъ, и врядъ ли любой изъ нашихъ читателей такъ или иначе не встрѣчался съ ними, хотя, быть можетъ, не каждый давалъ себѣ отчетъ въ томъ, что въ этомъ случаѣ онъ приходилъ въ соприкосновеніе съ обширной математическй областью, имѣющей огромное теоретическое и практическое значеніе.

Само собой разумѣется, что вмѣсто отдѣльныхъ словъ можно брать цѣлыя фразы и получать изъ нихъ анаграммы, т. е. новыя слова и выраженія, состоящія изъ тѣхъ же буквъ, только переставленныхъ въ другомъ порядкѣ. Величайшіе математическіе умы, особенно въ прежнее время, охотно составляли различнаго рода анаграммы.

Таковы, напр., Паскаль, Ферма, Гюйгенсъ, Валлисъ, Бернулли и многіе другіе. Съ одной стороны эти анаграммы служили интересными примѣрами развиваемаго этими учеными анализа соединеній и сочетаній, а съ другой, чтобы сохранить за собой первенство открытія, не сообщая его раньше во всеобщее свѣдѣніе, ученые часто выражали свое открытіе въ видѣ анаграммы, т. е. въ видѣ фразы или просто собранія буквъ, которыя при иной надлежащей перестановкѣ буквъ открывали секретъ изобрѣтателя. Такимъ образомъ анаграммы обращались въ родъ скрытаго письма, въ тайнопись или *криптограммы*, о которыхъ въ настоящей книгѣ читатель имѣетъ отдѣльную главу.

Точно также многія анаграммы обязаны своимъ происхожденіемъ тѣмъ послѣдователямъ мистики и каббалы, которые въ именахъ иныхъ людей или названіяхъ событій искали особаго скрытаго значенія.

Есть анаграммы, которыя пріобрѣли даже историческую извѣстность.

Нѣкоторыя извѣстныя анаграммы.

Великій математикъ и философъ Паскаль (1623—1662) задалъ было своимъ читателямъ и истолкователямъ довольно тяжелую работу. Въ его знаменитыхъ «*Pensés*» («Мысли») находится, между прочимъ, такое мѣсто:

«La manière d'écrire d'Épictète de Montaigne et de Salomon de Tultie est la plus d'usage» etc... т. е.: слогъ Эпиктета, Монтеня и Саломона де-Тюльти наиболѣе употребителенъ и т. д.

Имена Эпиктета и Монтеня извѣстны всѣмъ, но кто такой *Саломонъ де-Тюльти?* Это, очевидно, какой-то псевдонимъ, изобрѣтенный Паскалемъ,—догадывается коментаторъ. Но кто же скрывается подъ этимъ псевдонимомъ?

Отвѣтъ на этотъ вопросъ даетъ анаграмма. Если въ имени *Salomon de Tultie* (Саломонъ де-Тюльти) сдѣлать перестановку буквъ, то получится *Louis de Montalte* (Луи де-Монтальтъ), т. е. тотъ псевдонимъ, которымъ Паскаль подписывалъ свои знаменитыя *Lettres Provinciales* («Письма Провинціала»).

Христіанъ Гюйгенсъ (1629—1695) былъ первымъ, который открылъ, что планета Сатурнъ окружена плоскимъ кольцомъ, свободно висящимъ на уровнѣ экватора планеты. Открытіе это имъ сдѣлано въ 1655 году, а сочиненіе о «Системѣ Сатурна» онъ издалъ только въ 1659 году. Но, чтобы удержать за собой первенство открытія, Гюйгенсъ тотчасъ же записалъ его анаграммой изъ слѣдующихъ буквъ:

aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiiii, lll, mm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, ttttt, uuuuu.

Если изъ этихъ буквъ сдѣлать соотвѣтственныя перестановки, то получится такая латинская фраза:

Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato, т. е. онъ окруженъ кольцомъ тонкимъ, плоскимъ, нигдѣ не подвѣшеннымъ, наклоненнымъ къ эклиптикѣ.

Въ томъ же 1655 году Гюйгенсъ открылъ перваго спутника Сатурна (Титана) и нашелъ время его обращенія около планеты равнымъ 15-ти днямъ. Открытіе это онъ тоже облекъ въ форму анаграммы, копію которой послалъ, между прочимъ, знаменитому своему современнику, англійскому математику Валлису (Wallis). Но здѣсь получилась довольно забавная шутка. Валлисъ былъ мастеръ въ дѣлѣ истолкованія (дешифрированія) анаграммъ. Получивъ анаграмму Гюйгенса, онъ быстро истолковалъ ее и составилъ по этому поводу свою анаграмму, нѣсколько длиннѣе Гюйгенсовой. Но въ своемъ отвѣтѣ послѣднему Валлисъ ничего не говоритъ о своей дешифровкѣ, а просто благодаритъ Гюйгенса за вниманіе и пишетъ, что имѣетъ тоже нѣчто передать ему въ своей прилагаемой анаграммѣ. Гюйгенсъ послалъ Валлису истолкованіе своей анаграммы. Каково же было его изумленіе, когда въ отвѣтъ онъ получилъ рѣшеніе анаграммы Валлиса, изъ котораго вытекало, что послѣдній чуть не раньше будто бы сдѣлалъ то же самое открытіе, что и Гюйгенсъ!

Скоро выяснилось, что Валлисъ хотѣлъ пошутить и кстати показать безполезность анаграммы въ дѣлѣ скрытаго письма. Гюйгенсъ, однако, не оцѣнилъ этой шутки и разсердился... Великіе люди также имѣютъ свои маленькія слабости.

Изъ другихъ анаграммъ отмѣтимъ еще слѣдующія:

Въ словахъ *Révolution française* (французская революція) можно переставить буквы такъ, что получится:

Un veto corse la finira,

т. е. «ее закончитъ вето (запрещеніе) корсиканца» (Указаніе на Наполеона Бонапарте).

Изъ имени монаха, убійцы короля Генриха III,—*frère Jacques Clément* (братъ Жакъ Клеманъ) можно перестановкой буквъ получить:

C'est l'enfer qui m'a créé,

т. е. «меня создалъ адъ».

Изъ именъ короля Генриха III Валуа—*Henri de Valois* (Анри де Валуа) современники сдѣлали *Vilain Herode's*, т. е. «Иродова Мерзость».

Польскій писатель Яблонскій взялъ латинское названіе дома вельможъ Лещинскихъ—*Domus Lescinia* и составилъ изъ этихъ словъ такія анаграммы:

Ades incolumis, т. е. гряди невредимый.
Omnis es lucida, » » весь свѣтозарный.
Mane sidus loci, » » пребывай свѣтиломъ края.
Sis columna dei » » да будешь опорой Бога.
I, scande solium » » шествуй, гряди на престолъ.

Послѣдняя анаграмма оказалась даже «пророческой»: Лещинскій Станиславъ сдѣлался дѣйствительно польскимъ королемъ. Надо признать во всякомъ случаѣ, что сочетаніе буквъ въ словахъ *Domus Lescinia* даетъ, дѣйствительно, богатый матерьялъ для составленія льстивыхъ и угодливыхъ анаграммъ. О томъ, сколько тѣ же слова при перестановкѣ буквъ могутъ дать матеріала для шутки и сатиры, Яблонскій, видимо, затратившій большой запасъ времени для перестановки 13 буквъ, совершенно умалчиваетъ.

И въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что всѣ вышеприведенныя анаграммы Яблонскій нашелъ, благодаря не счастливой случайности или особымъ какимъ-либо пріемамъ, а путемъ дѣйствительныхъ перестановокъ,—т. е., написавъ 13 буквъ, составляющихъ слова

DOMUS LESCINIA,

онъ методически переставлялъ всѣми возможными способами эти 13 буквъ и прочитывалъ каждую перестановку, чтобы убѣдиться, получилась ли фраза, имѣющая смыслъ, или нѣтъ. Сколько всего въ такомъ случаѣ Яблонскій получилъ бы перестановокъ и сколько приблизительно времени онъ затратилъ бы на эту работу?

Поставимъ вопросъ нѣсколько шире и спросимъ такъ: сколькими способами можно переставить 13 буквъ, стоящихъ въ рядъ? При чемъ для простоты допустимъ сначала, что всѣ буквы различны.

Само собой разумѣется, что вмѣсто буквъ можно взять всякіе иные предметы. Можно, напримѣръ, задать себѣ вопросъ,

сколькими способами можно разложить въ рядъ извѣстное число различныхъ картъ, разноцвѣтныхъ камешковъ, картинокъ или книгъ, и вообще какихъ угодно предметовъ, или, какъ говорять въ данномъ случаѣ, *элементовъ.*

Вопросъ сводится, слѣдовательно, къ опредѣленію *числа линейныхъ перестановокъ (или перемѣщеній) изъ даннаго количества элементовъ.*

Далѣе мы дадимъ общее рѣшеніе этого интереснаго вопроса а пока разсмотримъ слѣдующія двѣ задачи.

Задача 45-я.

Церемонный обѣдъ семи.

Во второмъ изданіи *Récréations mathématiques et physiques* par M. Ozanam («Математическія и физическія развлеченія» М. Озанама), вышедшемъ въ Парижѣ въ 1788 году, находится слѣдующая интересная задача:

Семь лицъ должны были обѣдать, но между ними зашелъ церемонный споръ относительно мѣстъ, гдѣ кому сѣсть (это было, безъ сомнѣнія, въ какомъ-либо отдаленномъ отъ столицы провинціальномъ городѣ — замѣчаетъ здѣсь Озанамъ). Наконецъ, кто-то, чтобы прекратить пререканія, предложилъ всѣмъ сѣсть за столъ какъ попало, но съ тѣмъ, чтобы опять собраться завтра и въ слѣдующіе дни обѣдать вмѣстѣ и каждый разъ садиться по иному, до тѣхъ поръ, пока не будутъ исчерпаны всѣ возможныя перемѣщенія. Спрашивается, сколько разъ для этого придется имъ вмѣстѣ обѣдать?

Рѣшеніе.

Рѣшеніе задачи сводится, очевидно, къ отысканію *числа перестановокъ изъ семи элементовъ.* Въ главѣ «о числѣ перестановокъ» нѣсколько дальше мы покажемъ, какъ это дѣлается, а пока скажемъ просто, и попросимъ читателя на минуту повѣрить, что число такихъ перестановокъ изъ 7 элементовъ

равно 5 040. Такимъ образомъ выходитъ, что упомянутымъ въ задачѣ семи лицамъ придется обѣдать 5 040 разъ, или 5 040 дней, вмѣстѣ. Переводя на годы, получимъ изрядный промежутокъ времени въ 14 лѣтъ! Принять на себя обязательство четырнадцать лѣтъ изо дня въ день обѣдать въ одной и той же компаніи... Вотъ къ чему иногда могутъ привести церемонныя препирательства.

Если вмѣсто семи лицъ церемоннымъ споромъ займется большее общество, то дѣло грозитъ еще большими осложненіями. Въ своихъ «Initiations mathématiques» Ш. Лэзанъ разбираетъ задачу, совершенно подобную предыдущей, но на обѣдъ собралось не 7, а 12 особъ.

Задача 46-я.

Церемонный обѣдъ 12-ти.

Въ одинъ прекрасный вечеръ сошлось двѣнадцать человѣкъ, чтобы пообѣдать вмѣстѣ. Но такъ какъ мѣста за столомъ не были назначены заранѣе, между ними возникъ церемонный споръ въ то время, когда нужно было садиться за столъ,—споръ, не приведшій, впрочемъ, ни къ какому результату. Кто-то, чтобы выйти изъ затрудненія, предложилъ испробовать послѣдовательно всѣ возможные способы размѣщенія. Чтобы разрѣшить вопросъ, оставалось только выбрать перемѣщеніе, кажущееся наиболѣе удачнымъ. Попробовали было пересаживаться въ теченіе нѣскольких минутъ, но смѣшались, и дѣло, казалось, никакъ не могло благополучно разрѣшиться само собою. Къ счастью, между приглашенными находился учитель городского колледжа, имѣвшій кой-какія познанія въ математикѣ.

— Друзья мои,—сказалъ онъ,—супъ простынетъ. Давайте тянуть жребій, скорѣе дѣло будетъ.

Послѣдовали благоразумному совѣту, обѣдъ закончился самымъ радушнымъ образомъ.

Является вопросъ, почему учитель не нашелъ возможнымъ испробовать всѣ возможныя перемѣщенія на самомъ дѣлѣ?

Рѣшеніе.

Разъясненіе и рѣшеніе задачи послѣдовало уже за дессертомъ, когда, получивъ слово, учитель сказалъ:

— Знаете ли вы, сколько времени понадобилось бы намъ, чтобы испробовать всѣ возможныя перемѣщенія, которыя мы могли сдѣлать за этимъ столомъ, *полагая только по секундѣ для перехода отъ одного перемѣщенія къ другому?*

И такъ какъ всѣ молчали, онъ добавилъ:

— Продолжая такую маленькую игру день и ночь, мы должны были бы употребить на это болѣе 15 лѣтъ и 2-хъ мѣсяцевъ, не считая при этомъ, сколько бы намъ встрѣтилось високосныхъ годовъ. Вы видите, если жаркому угрожало высохнуть, то мы могли бы быть увѣрены, что погибнемъ всѣ отъ голода и лишенія сна. Будемте церемонны, если сердце намъ подсказываетъ, но не слишкомъ...

И это правда. Точное число различныхъ способовъ перемѣщеній, которое 12 человѣкъ могли бы занять за столомъ, накрытымъ на 12 приборовъ, равняется, какъ ниже увидимъ, 479 001 600: болѣе 479 милліоновъ, а 15 лѣтъ и 2 мѣсяца содержатъ приблизительно такое число секундъ.

Можно было бы еще замѣтить, что каждое перемѣщеніе 12-ти человѣкъ требуетъ гораздо болѣе времени, чѣмъ одна секунда, и что, слѣдовательно, на отысканіе удачнаго для всѣхъ положенія за столомъ понадобилось бы гораздо болѣе 15-ти лѣтъ. Это, впрочемъ, не мѣняетъ существа вопроса. Но что было бы, если бы собравшіеся обѣдать господа поступили по примѣру обѣдавшихъ въ предыдущей (45-й) задачѣ? Чтобы испробовать всѣ возможныя перемѣщенія, имъ пришлось бы обѣдать вмѣстѣ болѣе, чѣмъ 479 милліоновъ дней! Переведя на годы, получимъ милліоны лѣтъ...

О числѣ перестановокъ.

Изъ двухъ предыдущихъ задачъ мы узнали и приняли пока на вѣру, что если произвести всѣ перестановки изъ 7-ми элементовъ, то такихъ перестановокъ получается 5 040, а изъ 12-ти элементовъ такихъ перестанокъ получается уже 479 001 600. Число элементовъ возросло всего на 5, а въ какой огромной пропорціи возросло число перестановокъ!

Впрочемъ, вышеуказанныя числа были приняты нами пока на вѣру. Здѣсь мы попробуемъ получить ихъ на самомъ дѣлѣ и показать, какъ вообще найти число перестановокъ изъ любого числа элементовъ.

Возьмемъ сначала два различныхъ элемента a и b. Ясно, что здѣсь единственно возможны только *двѣ* перестановки.

$$ab \text{ и } ba$$

Значитъ число перестановокъ изъ 2-хъ элементовъ равно

$$1 \times 2 = 2.$$

Возьмемъ три элемента: a, b и c. Чтобы получить изъ нихъ, всѣ возможныя перестановки безъ повтореній и пропусковъ, поступаемъ такъ:

Беремъ сначала перестановки изъ двухъ элементовъ, т. е. ab и ba, и приставляемъ къ каждой изъ нихъ третій элементъ: въ концѣ, въ серединѣ и въ началѣ. Значитъ, изъ каждой двухъ-элементной перестановки получимъ по три перестановки,— именно:

$$\begin{matrix} abc & bac \\ acb & bca \\ cab & cba \end{matrix}$$

Всего 6 перестановокъ. Итакъ, число всѣхъ перестановокъ изъ 3-хъ элементовъ получится отъ перемноженія чиселъ $1 \times 2 \times 3 = 6$, или, принимая за знакъ умноженія точку, на-

пишемъ, что число всѣхъ перестановокъ изъ трехъ элементовъ будетъ

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Беремъ затѣмъ 4 элемента a, b, c и d. Сколько всѣхъ возможныхъ перестановокъ дадутъ эти буквы? Чтобы получить всѣ эти перестановки безъ пропусковъ и повтореній, самъ собой напрашивается слѣдующій способъ. Беремъ сначала всѣ 6 найденныхъ выше перестановокъ изъ 3-хъ буквъ:

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba.$$

Въ каждую изъ этихъ перестановокъ вводимъ четвертый элементъ d, приставляя его послѣдовательно: къ концу, между 2-й и 3-й буквой, между 1-й и 2-й буквой и въ началѣ. Такъ что *каждая* изъ этихъ 6 перестановокъ изъ 3-хъ элементовъ дастъ 4 перестановки изъ четырехъ элементовъ. А именно:

Перестановка	*abc*	даетъ	*abcd*	*abdc*	*adbc*	*dabc*
»	*acb*	»	*acbd*	*acdb*	*adcb*	*dacb*
»	*cab*	»	*cabd*	*cadb*	*cdab*	*dcab*
»	*bac*	»	*bacd*	*badc*	*bdac*	*dbac*
»	*bca*	»	*bcad*	*bcda*	*bdca*	*dbca*
»	*cba*	»	*cbad*	*cbda*	*cdba*	*dcba*

Всего изъ 5-хъ различныхъ элементовъ получаемъ $4 \cdot 6 = 24$ перестановки, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Итакъ, чтобы получить число всѣхъ линейныхъ перестановокъ изъ 4-хъ различныхъ элементовъ, надо перемножить между собой четыре первыхъ послѣдовательныхъ числа.

Прибавимъ еще пятый элементъ e и посмотримъ, сколько всего получится перестановокъ изъ пяти элементовъ a, b, c, d, e. Получить всѣ эти перестановки безъ пропусковъ и повтореній можно, опять таки поступая совершенно подобно предыдущему. Т. е., возьмемъ каждую изъ 24-хъ вышенаписанныхъ перестановокъ изъ 4-хъ буквъ и будемъ приставлять къ нимъ

пятую букву e въ концѣ, между буквами и въ началѣ, тогда первая, напр., перестановка $abcd$ дастъ пять перестановокъ:

$$abcde,\ abced,\ abecd,\ aebcd,\ eabcd.$$

Точно также получимъ по пять перестановокъ въ 5 буквъ изъ каждой изъ остальныхъ 23-хъ перестановокъ 4-хъ буквъ. Слѣдовательно, всего перестановокъ изъ 5 элементовъ можно сдѣлать $24 \cdot 5 = 120$, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Значитъ, число всѣхъ перестановокъ изъ пяти элементовъ равно произведенію первыхъ пяти послѣдовательныхъ чиселъ.

Введемъ шестой элементъ f. Разсуждая по предыдущему, мы найдемъ, что каждая изъ 120 перестановокъ въ 5-ть буквъ дастъ шесть перестановокъ изъ 6-ти буквъ. Всего, значитъ, такихъ перестановокъ изъ 6-ти элементовъ будетъ $120 \cdot 6 = 720$, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720,$$

т. е. число всѣхъ перестановокъ изъ 6 элементовъ равно произведенію шести первыхъ послѣдовательныхъ чиселъ.

Разсуждая точно такъ же, какъ выше, найдемъ, что число перестановокъ изъ семи элементовъ будетъ $720 \cdot 7 = 5\,040$, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5\,040.$$

Это число и есть какъ разъ то, которое мы привели въ задачѣ о церемонномъ обѣдѣ семи особъ. Читатель теперь, думаемъ, убѣдился, что оно нисколько не преувеличено.

Идя указаннымъ выше путемъ еще дальше, мы найдемъ, что число перестановокъ изъ восьми различныхъ элементовъ будетъ равно произведенію восьми послѣдовательныхъ чиселъ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$. Число перестановокъ изъ 9 элементовъ будетъ равно произведенію 9-ти чиселъ:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362\,880 \text{ и т. д.}$$

Попробуемъ указаннымъ путемъ составить таблицу числа перестановокъ отъ 1 до 25 элементовъ. Получается

Число перестановокъ.	Число элементовъ.
1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5 040	7
40 320	8
362 880	9
3 628 800	10
39 916 800	11
479 001 600	12
6 227 020 800	13
87 178 291 200	14
1 307 674 368 000	15
20 922 789 888 000	16
355 687 428 096 000	17
6 402 373 705 728 000	18
121 645 100 408 832 000	19
2 432 902 008 176 640 000	20
51 090 942 171 709 440 000	21
1 124 000 727 777 607 680 000	22
25 852 016 738 884 976 640 000	23
620 448 401 733 239 439 360 000	24
15 511 210 043 330 985 984 000 000	25

Въ этой таблицѣ мы находимъ, между прочимъ, число перестановокъ изъ 12-ти элементовъ, равное 479 001 600, о которомъ намъ приходилось говорить въ задачѣ о церемонномъ обѣдѣ 12-ти особъ.

Бѣглый взглядъ на эту таблицу показываетъ намъ, съ какой

огромной быстротой возрастаетъ число перестановокъ при послѣдовательномъ возростаніи перемѣщаемыхъ предметовъ. Уже при 25 элементахъ получается число изъ 26 цифръ,—головокружительное число, о которомъ мы не можемъ составить себѣ никакого реальнаго представленія, если не прибѣгнемъ къ какому либо описательному сравненію.

Возвратимся къ главѣ объ историческихъ анаграммахъ и пересчитаемъ, сколько перестановокъ изъ 13-ти буквъ пришлось бы сдѣлать Яблонскому въ словахъ *domus lescinia* для полученія своихъ анаграммъ, если бы онъ дѣйствительно дѣлалъ *всѣ* перестановки. Таблица показываетъ, что число перестановокъ изъ 13 элементовъ равно 6 227 020 800.

Если бы допустить даже такую невѣроятную скорость, что для полученія каждой перестановки и ея прочтенія Яблонскій употреблялъ всего одну секунду, то и тогда, безостановочно работая по 12 часовъ въ сутки, понадобилось бы на выполненіе всѣхъ этихъ перестановокъ около 395 лѣтъ! Ясно, что, отыскивая свои анаграммы, Яблонскій, прожившій обыкновенную человѣческую жизнь, шелъ не этимъ путемъ.

Обозначенія и выводъ общей формулы.

Условимся въ обозначеніяхъ. Обыкновенно число перестановокъ изъ n элементовъ обозначаютъ символомъ P_n, т. е. ставятъ латинскую букву P (по-французски перестановка: Permutation) и внизу справа отъ нея маленькое n. Слѣдовательно символъ P_2 означаетъ число перестановокъ изъ 2-хъ элементовъ, P_3—число перестановокъ изъ трехъ элементовъ, P_4—число перестановокъ изъ 4-хъ элементовъ и т. д. И мы нашли уже, что

$$P_1 = 1$$
$$P_2 = 1 \cdot 2$$
$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вообще $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \; . \; . \; \cdot n.$

Эту послѣднюю *общую формулу* мы сейчасъ выведемъ со всей строгостью, а не просто путемъ того послѣдовательнаго наведенія, котораго держались до сихъ поръ. Итакъ, докажемъ теорему:

Число перестановокъ изъ n элементовъ равно произведенію послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n, т. е.

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \;.\;.\; (n-1) \cdot n.$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть составлены перестановки изъ n—1 буквъ $a, b, c, d, \ldots, h, i, k$, и пусть число перестановокъ будетъ P_{n-1}. Чтобы составить перестановки изъ n буквъ, беремъ каждую перестановку изъ n—1 буквъ и вводимъ въ нее n-ую букву l, помѣщая послѣдовательно слѣва и справа этой перестановки и во всѣ промежутки между ея буквами. Такимъ образомъ мы составимъ всѣ перестановки изъ n буквъ, безъ повтореній и безъ пропусковъ. Безъ повтореній — потому, что одна перестановка будетъ отличаться отъ другой или порядкомъ n—1 первоначально взятыхъ буквъ, или мѣстомъ, которое занимаетъ новая буква l. Безъ пропусковъ, ибо, взявъ перестановку *ablc...k*, напр., замѣчаемъ, что она произошла изъ перестановки *abc...k*, составленной изъ n—1 первоначальныхъ элементовъ, въ которую буква l введена на 3-е мѣсто; слѣд., такая перестановка была получена.

Итакъ: указаннымъ способомъ получимъ всѣ перестановки изъ n буквъ. Опредѣлимъ ихъ число. Каждая перестановка изъ n—1 буквъ даетъ n перестановокъ изъ n буквъ, ибо буква l можетъ занять въ первой n различныхъ мѣстъ; слѣд.,

$$P_n = nP_{n-1}.$$

Такова связь между P_{n-1} и P_n. Формула эта справедлива для всякаго n, будучи совершенно общею: давая въ ней n послѣдовательно всѣ значенія отъ 2 до n, находимъ:

$$P_2 = P_1 \cdot 2; \quad P_3 = P_2 \cdot 3; \quad P_4 = P_3 \cdot 4; \;.\;.\;.\;; \quad P_n = P_{n-1} \cdot n.$$

Перемноживъ эти равенства, уничтоживъ общіе множители въ обѣихъ частяхъ и замѣчая, что $P_1 = 1$, находимъ:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \;.\;.\;.\; (n-1) \cdot n.$$

Произведеніе n послѣдовательныхъ чиселъ, т. е. $1\cdot2\cdot3\ldots n$, встрѣчается въ многочисленныхъ формулахъ математическаго анализа и носитъ спеціальное названіе *факторіала* n. Весьма часто для факторіала n употребляютъ болѣе короткое и, пожалуй, даже болѣе изящное обозначеніе, а именно: вмѣсто длиннаго иногда ряда цифръ послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ ставятъ послѣднее число и послѣ него восклицательный знакъ, такъ что

$$1\cdot2=2!$$
$$1\cdot2\cdot3=3!$$
$$1\cdot2\cdot3\cdot4=4!$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(n-1)\cdot n=n!$$

Слѣдовательно, общая формула числа перестановокъ изъ n элементовъ можетъ быть написана и въ такомъ краткомъ и изящномъ видѣ:

$$P_n=n!$$

Задача 47-я.

Споръ кучера съ пассажиромъ.

На станціи дилижансовъ нетерпѣливый проѣзжій, увидя кучера, спросилъ:

— Не пора ли запрягать?

— Что вы!—отвѣтилъ кучеръ,—еще полчаса до отхода дилижанса. За это время я успѣю двадцать разъ и запречь, и отпречь, и опять запречь. Намъ не впервой...

— А сколько въ дилижансъ впрягается лошадей?

— Пять.

— Сколько времени полагается на запряжку лошадей?

— Да при аккуратности минуты двѣ—не больше!

— Ой-ли?—усумнился пассажиръ.—Пять лошадей запречь въ 2 минуты!.. Что-то очень скоро...

— И очень просто, господинъ,—отвѣчалъ кучеръ.— Выведутъ лошадей въ сбруѣ, постромкахъ съ вальками, въ возжахъ, какъ есть. Остается только накинуть кольца вальковъ на крюки, приструнить «въ секундъ» двухъ среднихъ лошадей къ дышлу, взялъ возжи въ руки, сѣлъ на козлы и готово... Поѣзжай! Дѣло знакомое...

— Ну, хорошо! —замѣтилъ пассажиръ.— Допустимъ, что такимъ образомъ ты можешь запречь и отпречь лошадей хотя двадцать разъ въ часъ, какъ говоришь. Но если ихъ придется перепрягать одну на мѣсто другой да еще всѣхъ, то ужъ этого ты никогда не сдѣлаешь не только въ часъ, но и въ два.

— Тоже пустячное дѣло, господинъ!—расхвастался кучеръ. — Развѣ намъ не приходится перепрягать! Да какими угодно вамъ манерами я ихъ всѣхъ вамъ перепрягу въ часъ, а то и меньше. Одну лошадь поставилъ на мѣсто другой, и готово! Минутное дѣло!

— Нѣтъ, ты перепряги ихъ не тѣми «манерами», которыя мнѣ угодны,—сказалъ господинъ, — а **всѣми** способами, какими только можно перепрягать 5 лошадей, считая на перепряжку уже одну минуту, какъ ты хвастаешь.

Самолюбіе кучера было нѣсколько задѣто.

— Конечно, всѣхъ лошадей и всѣми способами перепрягу не больше, какъ въ часъ.

— Я далъ бы сто рублей, чтобы посмотрѣть, какъ ты сдѣлаешь это въ часъ!—сказалъ пассажиръ.

— А я при своей бѣдности заплатилъ бы за вашъ проѣздъ въ дилижансѣ, если бы этого не сдѣлалъ,— отвѣчалъ кучеръ.

Такъ и условились: Кучеръ обязался въ часъ перепрячь 5 лошадей дилижанса всѣми способами, какіе только возможны. Если онъ это сдѣлаетъ, то полу-

чаетъ съ пассажира 100 руб., если же нѣтъ, то пассажиръ ѣдетъ дальше на счетъ кучера. Каковъ былъ результатъ спора?

Рѣшеніе.

Пострадалъ кучеръ, который, очевидно, не отличался сильной сообразительностью. Число запряжекъ, которыя онъ долженъ былъ по условію сдѣлать, равно числу всѣхъ перестановокъ изъ 5-ти элементовъ. Но изъ предыдущаго мы уже знаемъ, что

$$P_5 = 5! = 120.$$

Слѣдовательно, кучеру пришлось сдѣлать 120 перепряжекъ. Считая на такую перепряжку только минуту времени, выходитъ, что на всѣ надо затратить 2 часа. Остановившись на 60-й перепряжкѣ, кучеръ долженъ былъ уже ѣхать, заплативъ за проѣздъ пассажира.

Задача 48-я.

Сколькими способами могутъ размѣститься въ классѣ 30 учениковъ?

Рѣшеніе.

Приходится вычислять число перестановокъ изъ 30 элементовъ, т. е. P_{30}. Его нѣтъ въ нашей таблицѣ на стр. 195, доведенной только до $n = 25$. Совѣтовать кому-либо тратить время на безцѣльный рядъ умноженій не рѣшаемся, а потому просто приводимъ это огромное число.

$$P_{30} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \; . \; . \; . \; 30 = 30! =$$
$$= 265\,252\,859\,812\,191\,058\,636\,308\,480\,000\,000.$$

Желающій поупражняться въ умноженіи можетъ, впрочемъ, насъ провѣрить. Но сумѣете ли вы сказать словами это написанное число?

Задача 49-я.

Сколько различныхъ чиселъ можно составить изъ цифръ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, такъ, чтобы каждая

цифра находилась въ каждомъ числѣ только по одному разу, а числа, начинающіяся нулемъ, не считать?

Рѣшеніе.

Искомыя числа, очевидно, будутъ всѣ десятизначныя. Беремъ сначала 9 значащихъ цифръ. Число перестановокъ изъ нихъ будетъ $P_9 = 9!$ (оно есть въ таблицѣ на стр. 195). Если теперь въ каждую полученную перестановку будемъ приставлять нуль къ концу и во всѣ промежутки между цифрами, но къ началу не будемъ его приставлять, то каждая перестановка изъ 9 цифръ дастъ еще 9 перестановокъ изъ 10-ти цифръ. Итакъ, искомое число есть

$$9P_9 = 9 \cdot 9! = 3\,265\,920.$$

Задача 50-я.

Сколько чиселъ большихъ 23 000 получится, если всѣми возможными способами переставлять цифру 1, 2, 3, 4, 5?

Рѣшеніе.

Всѣхъ перестановокъ изъ данныхъ пяти цифръ можно сдѣлать $P_5 = 120$. Но изъ полученныхъ такимъ образомъ чиселъ надо отбросить, очевидно, всѣ начинающіяся единицей, а такихъ чиселъ 24 (ибо $P_4 = 24$); кромѣ того необходимо еще отбросить всѣ числа, начинающія цифрами 21, а такихъ чиселъ 6. Итакъ, требуемыхъ чиселъ получается $120 - 30 = 90$.

Задача 51-я.

Сколько группъ можно составить изъ буквъ слова «склеить» такъ, чтобы гласныя не были разъединены?

Рѣшеніе.

Гласныя не разъединяются, поэтому считаемъ ихъ за одну букву и находимъ число перестановокъ изъ шести буквъ. Число ихъ P_6. Но гласныя можно переставить одну на мѣсто другой. Значитъ для числа искомыхъ группъ имѣемъ $2P_6 = 1\,440$.

Фигурныя или наглядныя перестановки.

Перестановки нѣсколькихъ предметовъ можно представить *рисункомъ* (графически). Эта остроумная идея, сдѣлавшаяся достояніемъ послѣдняго времени, благодаря французскому математику Эдуарду Люка (1842—1891), нужно думать, поведетъ еще къ весьма многимъ интереснымъ и важнымъ открытіямъ, или усовершенствованіямъ математическихъ методовъ.

Покажемъ здѣсь, какъ графически изобразить P_4, т. е. всѣ перестановки изъ 4-хъ элементовъ. Такихъ перестановокъ можно сдѣлать, какъ знаемъ, 24. Такъ напр., выпишемъ всѣ перестановки изъ 4-хъ цифръ 1, 2, 3, 4.

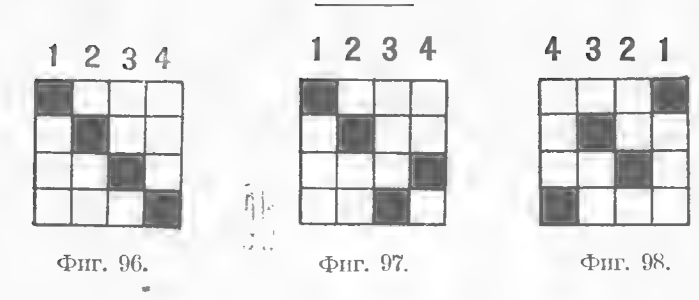
1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Чтобы графически изобразить, напр., первую перестановку (1 2 3 4), беремъ квадратъ, состоящій изъ 16 равныхъ клѣтокъ ($4 \times 4 = 16$) и условимся, что каждый вертикальный столбецъ клѣтокъ, считая слѣва направо и сверху внизъ, будетъ соотвѣтствовать *мѣсту* элемента въ перестановкѣ; а каждая горизонтальная строка *числу*, означающему элементъ. Въ такомъ случаѣ, беря перестановку **1 2 3 4**, находимъ, что числу **1** соотвѣтствуетъ первая клѣточка (сверху) первой строки и перваго столбца: зачернимъ ее; числу **2** соотвѣтствуетъ вторая клѣточка второго столбца и второй строки: зачернимъ ее; числу **3** соотвѣтствуетъ третья клѣточка 3-го столбца и третьей строки: зачернимъ ее, и, наконецъ, числу **4** соотвѣтствуетъ 4-я клѣточка четвертаго столбца и четвертой строки: зачернимъ ее. Въ такомъ случаѣ перестановка **1 2 3 4** графически изобразится фиг. 96-й.

Подобно же слѣдующая перестановка **1 2 4 3** изобразится фигурой 97-ой.

Перестановка, напр., **4 3 2 1** изобразится фиг. 98-ой.

На фиг. 99-ой въ послѣдовательномъ порядкѣ представлены графически всѣ 24 перестановки изъ четырехъ элементовъ.



Фиг. 96. Фиг. 97. Фиг. 98.

Если бы вмѣсто цифръ элементами перестановки служили, напр., буквы, жетоны, шашки и вообще любые предметы, то, обозначивъ каждый предметъ соотвѣтствующимъ числомъ, мы опять таки графически изобразимъ всѣ перестановки изъ этихъ предметовъ, какъ указано выше.

Чтобы получить фигурныя перестановки изъ 5 элементовъ, надо взять квадратъ, состоящій изъ $5 \times 5 = 25$ клѣтокъ. Способомъ, совершенно подобнымъ предыдущему, на этой 25-тиклѣточной квадратной доскѣ мы можемъ графически представить всѣ 120 ($P_5 = 5! = 120$) перестановокъ изъ 5 элементовъ.

Фиг. 99.

Для полученія фигурныхъ перестановокъ изъ 6 элементовъ ($P_6 = 6! = 720$) надо взять квадратъ въ $6 < 6 = 36$ клѣтокъ и т. д. Вообще, для полученія всѣхъ фигурныхъ перестановокъ нуженъ квадратъ, состоящій изъ $n \cdot n = n^2$ клѣтокъ.

Наша общераспространенная шахматная (или шашечная) доска можетъ, слѣдовательно, служить для практическаго полученія фигурныхъ перестановокъ изъ 8-ми элементовъ, т. е. для $P_8 = 8! = 40\,320$. И само собой разумѣется, что, прикрывая полосками бумаги ненужныя намъ клѣтки, мы на этой же шахматной доскѣ можемъ получить квадраты въ $7 \cdot 7 = 49$, въ $6 \cdot 6 = 36$, въ $5 \cdot 5 = 25$, въ $4 \cdot 4 = 16$ и въ $3 \cdot 3 = 9$ клѣтокъ, на которыхъ можемъ практически осуществлять фигурныя перестановки P_7, P_6, P_5, P_4 и P_3.

Задача 52-я.

Шахматный вопросъ.

Шахматная фигура *тура* (или ладья), какъ извѣстно, можетъ «брать» всякую фигуру, стоящую съ ней на одномъ столбцѣ клѣтокъ или на одной горизонтальной полосѣ.

Всмотритесь въ квадраты на фиг. 99: каждый изъ нихъ представляетъ тоже шахматную доску, но только изъ 16-ти клѣтокъ. И каждая фигурная перестановка на этой доскѣ представляетъ такое положеніе 4-хъ туръ, при которомъ ни одна не можетъ взять другой. Значитъ, на доскѣ въ 16 клѣтокъ 4 туры можно разставить 24-мя способами такъ, что ни одна не можетъ взять другой. На доскѣ изъ $5^2 = 25$ клѣтокъ можно, какъ уже указано, получить 120 фигурныхъ перестановокъ, другими словами это значитъ, что на такой доскѣ можно разставить 120-ю способами 5 туръ такъ, что ни одна не будетъ брать другой, и т. д. Итакъ, мы приходимъ къ заключенію, что каждая фигурная перестановка изъ любого числа элементовъ на соотвѣтствующей доскѣ даетъ такое расположеніе шахматныхъ туръ, при которомъ онѣ не могутъ брать одна другой. Теперь будетъ нетрудно рѣшить вопросъ относящійся къ нашей обыкновенной шахматной доскѣ:

Сколькими способами на шахматной доскѣ можно разставить 8 туръ такъ, чтобы ни одна изъ нихъ не могла брать другой?

Рѣшеніе ясно изъ предыдущаго: число такихъ способовъ равно числу перестановокъ изъ 8 элементовъ.

$$P_8 = 8! = 40\,320.$$

Врядъ ли у кого хватитъ терпѣнія и времени 40 320 разъ переставлять 8 туръ на шахматной доскѣ, чтобы разрѣшить поставленный вопросъ практическимъ путемъ. Между тѣмъ съ помощью теоріи графическаго изображенія перестановокъ, данной Э. Люка, вопросъ рѣшается чуть не «въ двухъ словахъ». Вообще, теорія соединеній имѣетъ большое приложеніе къ разнаго рода играмъ. Она, какъ и теорія вѣроятностей, по остроумному выраженію иныхъ, родилась и выросла за игорнымъ столомъ.

Перестановки съ повтореніями.

Мы умѣемъ пока опредѣлять число перестановокъ въ томъ случаѣ, когда всѣ взятые для перестановки элементы *различны*. Но весьма обыкновенны случаи, когда предлагается поставить въ рядъ всѣми возможными способами *n* элементовъ, при чемъ не всѣ элементы различны между собою. Такъ, напр., возьмемъ слова *Сила* и *Анна*. То и другое слово состоитъ изъ 4-хъ буквъ, и относительно перваго мы уже знаемъ, что, переставляя въ немъ буквы всѣми возможными способами, мы получимъ 24 *различныхъ* перестановки ($P_4 = 4! = 24$). Не то будетъ въ словѣ *Анна*. Здѣсь буква *а* повторяется два раза, буква *н* тоже повторяется 2 раза, и если въ этомъ словѣ вы попробуете перемѣщать буквы всѣми возможными способами, то различныхъ перестановокъ вы получите только 6, а именно:

анна, *анан*, *аанн*, *нана*, *ннаа*, *наан*.

Въ самомъ дѣлѣ, припишите одинаковымъ буквамъ въ словѣ *анна* различные значки; тогда получите 4 различныхъ элемента. Выпишите всѣ 24 перестановки изъ этихъ элементовъ и затѣмъ

уничтожьте значки. Вы убѣдитесь, что въ сущности получается только 6 написанныхъ выше различныхъ перестановокъ.

Слѣдовательно, необходимо различать линейныя перестановки безъ повтореній, и **перестановки съ повтореніями.** Число перестановокъ изъ n различныхъ элементовъ мы умѣемъ найти, но *какъ опредѣлить число перестановокъ изъ n элементовъ съ повтореніями?*

Задача эта не представляетъ особыхъ трудностей, и мы разрѣшимъ ее сразу для общаго случая.

Пусть дано n элементовъ, или предметовъ

$$a, b, c, d, \ldots\ldots m,$$

изъ которыхъ не всѣ различны, но нѣкоторые повторяются, и пусть

a	повторяется	p	разъ
b	»	q	»
c	»	r	»
. . .	. . .	. . .	. . .
m	»	s	»

Само собой разумѣется, что нѣкоторые изъ элементовъ могутъ не повторяться, т. е. они входятъ только по одному разу. Въ такомъ случаѣ въ ряду чиселъ $p, q, r, \ldots s$ нѣкоторыя будутъ равны 1. Всѣ же эти числа связаны, очевидно, условіемъ

$$p+q+r+\ldots\ldots+s=n.$$

Мы не знаемъ пока числа перестановокъ изъ n элементовъ съ повтореніями, поэтому просто означимъ его буквой x. Если, теперь, мы найдемъ, въ какомъ отношеніи находится это число x къ извѣстному нами числу перестановокъ изъ n элементовъ безъ повтореній, P_n, то и рѣшимъ вопросъ.

Итакъ представимъ, что *перестановки съ повтореніями* изъ n элементовъ у насъ всѣ выписаны, и что ихъ x. Возьмемъ теперь первый повторяющійся p разъ элементъ a и приставимъ къ нимъ внизу значки 1, 2, 3, 4 . . . p. Такимъ пріемомъ мы p одинаковыхъ элементовъ какъ бы обратимъ въ различные и

затѣмъ переставимъ эти p элементовъ всѣми возможными способамм. Такъ какъ изъ p элементовъ получается P_p перестановокъ, и мы дѣлаемъ эти перестановки во всѣхъ x перестановкахъ, то теперь мы получимъ, очевидно, вмѣсто x перестановокъ съ повтореніями большее число ихъ, а именно: всего $x \cdot P_p$ различныхъ (что не трудно доказать) перестановокъ, гдѣ теперь буква b повторяется q разъ, буква c повторяется r разъ, . . . буква m повторяется s разъ.

Подобно предыдущему, приставимъ значки 1, 2, 3, ... q къ одинаковымъ элементамъ b, сдѣлаемъ ихъ такимъ образомъ различными и, переставивъ всѣми способами, найдемъ, что изъ каждой перестановки (число которыхъ теперь $x \cdot P_p$) получимъ P_q новыхъ различныхъ перестановокъ; и число всѣхъ такимъ образомъ полученныхъ перестановокъ будетъ, очевидно,

$$x \cdot P_p \cdot P_q.$$

Поступая совершенно подобно предыдущему съ элементомъ c, мы увеличимъ еще число различныхъ перестановокъ, которыхъ теперь станетъ уже

$$x \cdot P_p \cdot P_q \cdot P_r$$

и т. д. Когда, наконецъ, мы придемъ къ послѣднему элементу m, повторяющемуся s разъ, и поступимъ съ нимъ точно такъ же, какъ съ предыдущими, то получимъ, $x \cdot P_p \cdot P_q \cdot P_r \ldots . P_s$ перестановокъ. Но какихъ и сколько именно?

Ясное дѣло, что путемъ введенія значковъ мы n элементовъ съ повтореніями обратили въ n **различныхъ** элементовъ и описаннымъ выше процессомъ получили, слѣдовательно, *всѣ* возможныя перемѣщенія изъ n элементовъ безъ повтореній, т. е. P_n. Другими словами, мы нашли, что

$$x \cdot P_p \cdot P_q \cdot P_r \ . \ . \ . \ P_s = P_n.$$

Чтобы опредѣлить x, надо обѣ части этого равенства раздѣлить на $P_p \cdot P_q \cdot P_r \ldots . P_s$. Слѣдовательно,

$$x = \frac{P_n}{P_p \cdot P_q \cdot P_r \ldots P_s}$$

Такова общая формула для нахожденія числа перестановокъ съ повтореніями изъ n элементовъ, если различные элементы повторяются p, q, r, . . . s разъ. Такъ какъ

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \; . \; . \; . \; . \; n = n!;$$
$$P_p = 1 \cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; p = p!;$$
$$P_q = 1 \cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; q = q! \text{ и т. д.,}$$

то формулу эту можно написать такъ:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \; . \; . \; . \; . \; n}{1 \cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; P \cdot 1 \cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; q \cdot 1 \cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; r \; . \; . \; . \; . \; 1 \cdot 2 \cdot 3 \; . \; . \; . \; . \; s}$$

или въ еще болѣе изящномъ и краткомъ видѣ

$$\frac{n!}{P! \cdot q! \cdot r! \; . \; . \; . \; . \; s!}$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что на практикѣ опредѣленіе числа перестановокъ съ повтореніями не представляетъ никакихъ затрудненій.

Возьмемъ, напримѣръ, названіе извѣстной горы *Араратъ*. Сколько различныхъ перестановокъ можно получить изъ составляющихъ это слово буквъ, если отбросить твердый знакъ? Рѣшеніе сводится къ опредѣленію числа перестановокъ съ повтореніями.

Если отбросить *ъ*, остается 6 буквъ, изъ которыхъ *а* повторяется 3 раза, *р* повторяется 2 раза. Слѣдовательно, всего различныхъ перестановокъ съ повтореніями получается

$$\frac{P_6}{P_3 \cdot P_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 60.$$

Задача 53-я.

Залъ украшается 14-ю флагами, изъ которыхъ 2 синихъ, 3 красныхъ, 2 бѣлыхъ, 3 зеленыхъ, 2 желтыхъ и 2 фіолетовыхъ. Сколькими способами можно ихъ расположить?

Рѣшеніе.

Отвѣтъ находимъ прямо по выведенной выше формулѣ для перестановокъ съ повтореніями. Онъ есть

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \; . \; . \; . \; . \; 14}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot (1 \cdot 2)^4} = 151\,351\,200.$$

За круглымъ столомъ.

Возвратимся къ задачѣ 45-й о церемонномъ обѣдѣ 7 лицъ. Задача эта, какъ упомянуто, рѣшена еще въ 17 вѣкѣ Озанамомъ, и онъ нашелъ, что церемонные гости должны были бы сдѣлать 5 040 пересадокъ, чтобы найти одну, наиболѣе удовлетворяющую всѣхъ. При болѣе внимательномъ разсмотрѣніи оказывается однако, что задача эта нуждается въ существенныхъ замѣчаніяхъ.

Если всѣ мѣста за столомъ принять, какъ совершенно различныя, то рѣшеніе Озанама вѣрно. Но если принимать въ расчетъ не сосѣдство того или иного стула съ окномъ, печкой, дверью и т. д., а только взаимное расположеніе собесѣдниковъ, то дѣло мѣняется.

Положимъ, что 7 лицъ обѣдаютъ за *круглымъ столомъ*. Ясно, что относительное положеніе всѣхъ обѣдающихъ не измѣнится, если по данному знаку всѣ они встанутъ, и затѣмъ каждый сядетъ на мѣсто своего сосѣда справа, и такъ повторятъ 7 разъ, пока каждый не возвратится на свое первоначальное мѣсто. При такомъ положеніи дѣла выходитъ, что Озанамъ принимаетъ за различныя такія семь прямолинейныхъ перестановокъ, которыя въ сущности равны одной такъ называемой **круговой перестановкѣ.** Слѣдовательно, найденное Озанамомъ число совмѣстныхъ обѣдовъ семи лицъ 5 040 надо въ данномъ случаѣ уменьшить въ 7 разъ. Получится 720.

Съ другой стороны, надо обратить вниманіе и на то, что взаимное расположеніе гостей не измѣнится, если они сядутъ такъ, что каждый сосѣдъ справа окажется сосѣдомъ слѣва. Значитъ, найденное число 720 нужно еще уменьшить въ 2 раза,

т. е. получается всего 360 обѣдовъ, которыми собесѣдники могутъ расчесться другъ съ другомъ въ теченіе одного лишь года.

Къ тому же результату мы пришли бы, если бы одинъ изъ обѣдающихъ сидѣлъ на одномъ и томъ же мѣстѣ, а остальные шесть перемѣщались всѣми возможными способами.

Сдѣланныя здѣсь замѣчанія относятся и къ задачѣ 46-й.

Такимъ образомъ, къ понятіямъ о простыхъ или линейныхъ перестановкахъ и о перестановкахъ съ повтореніями мы должны присоединить еще понятіе о *круговыхъ перестановкахъ*. Предлагаемъ читателю ознакомиться съ ними по другимъ руководствамъ.

Задача 54-я.

Письма и адреса.

Имѣется n писемъ, и для нихъ заготовлено n конвертовъ съ адресами. Сколькими способами можно размѣстить письма такъ, чтобы ни одно изъ нихъ не находилось въ назначенномъ для него конвертѣ?

Рѣшеніе.

Задача сводится къ опредѣленію числа такихъ перестановокъ изъ n буквъ съ различными значками, какъ a_1, b_2, c_3,... n_n, въ которыхъ ни одна буква не находилась бы на томъ мѣстѣ, которое указано ея значкомъ-номеромъ. Извѣстно нѣсколько рѣшеній этой задачи. Вотъ одно изъ простѣйшихъ:

Обозначимъ письма буквами a. b, c, . . . ; конверты буквами a', b', c', . . . Пусть требуемое число будетъ $F(n)$.

a можно положить въ любой изъ $n-1$ конвертовъ b', c';... Пусть a положено въ k'; k можно положить въ a', и тогда всѣ остальныя письма можно размѣстить не въ надлежащіе конверты $F(n-2)$ способами. Также, если a положить въ k', то остальныя письма можно размѣстить такъ, чтобы k не попало въ a', b не попало въ b', и т. д. $F(n-1)$ способами.

Итакъ, если a положено въ k', то можно удовлетворить задачѣ $F(n-1)+F(n-2)$ способами. То же самое будетъ, если a будетъ помѣщено въ какой угодно изъ пакетовъ b', c',... Слѣдовательно,

$$F(n)=(n-1)[F(n-1)+F(n-2)],$$

или

$$F(n)-nF(n-1)=-[F(n-1)-(n-1)F(n-2)].$$

Подобнымъ образомъ

$$F(n-1)-(n-1)F(n-2)=-[F(n-2)-(n-2)F(n-3)],$$

. . . .

$$F(3)-3F(2)=-[F(2)-2F(1)].$$

Но, очевидно,

$$F(2)=1 \text{ и } F(1)=0;$$

поэтому

$$F(n)-nF(n-1)=(-1)^n.$$

Откуда

$$\frac{F(n)}{1\cdot 2\ldots n}-\frac{F(n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}=(1)^n\cdot\frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)}.$$

Подобно этому

$$\frac{F(n-1)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}-\frac{F(n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-2)}=\frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)}(-1)^{n-1}.$$

. . . .

$$\frac{F(2)}{1\cdot 2}-\frac{F(1)}{1\cdot 1}=(-1^2)\cdot\frac{1}{1\cdot 2}.$$

Отсюда, складывая, находимъ:

$$F(n)=1\cdot 2\cdot 3\ldots n\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n}\right).$$

Размѣщенія.

Задача 55-я.

Зададимъ себѣ такой простой вопросъ:

Сколько различныхъ двухзначныхъ чиселъ можно составить изъ трехъ цифръ 1, 3, 5?

Рѣшеніе.

Вопросъ можно выразить другими словами такъ: изъ трехъ различныхъ цифръ составить всѣ возможныя группы по двѣ цифры такъ, чтобы всѣ эти группы отличались или самими цифрами или только порядкомъ ихъ.

Чтобы получить всѣ нужныя намъ группы безъ пропусковъ и повтореній, поступаемъ такъ: беремъ поочередно каждую изъ данныхъ цифръ 1, 3, 5 и приставляемъ къ нимъ справа каждую изъ остальныхъ двухъ цифръ. Получаемъ

13	31	51
15	35	53

т. е. всего $3 \cdot 2 = 6$ группъ.

Мы условились выше приставлять къ каждой цифрѣ остальныя цифры справа. Само собой разумѣется, что дѣло не измѣнилось бы, если бы мы приставляли къ каждой цифрѣ остальныя не справа, а слѣва. Слѣдуетъ только, во избѣжаніе путаницы, помнить разъ поставленное условіе и приставлять элементы или только справа, или только слѣва.

Замѣтимъ также, что если бы въ данной задачѣ мы задались вопросомъ получить изъ 3-хъ цифръ всѣ возможныя группы по 3, то пришли бы къ извѣстнымъ уже намъ линейнымъ *перестановкамъ* изъ трехъ элементовъ.

Прибавимъ еще одинъ элементъ, т. е. возьмемъ четыре нечетныхъ цифры 1, 3, 5, 7 и спросимъ себя, сколько можно получить изъ этихъ четырехъ различныхъ группъ по двѣ цифры, отличающихся или самими цифрами, или порядкомъ ихъ. Другими словами: изъ четырехъ различныхъ цифръ сколько можно составить различныхъ двухзначныхъ чиселъ?

Чтобы получить всѣ искомыя нами группы по двѣ цифры безъ пропусковъ и повтореній, опять, подобно предыдущему, беремъ каждую цифру по очереди и приставляемъ къ ней справа всѣ остальныя цифры. Получаемъ

1 3	3 1	5 1	7 1
1 5	3 5	5 3	7 3
1 7	3 7	5 7	7 5

Всего $4 \times 3 = 12$ различныхъ двухзначныхъ чиселъ.

Сколько изъ тѣхъ же элементовъ 1, 3, 5, 7 можно составить различныхъ группъ по 3 цифры въ каждой группѣ?

Чтобы получить ихъ всѣ безъ пропусковъ и повтореній, мы, очевидно, должны взять всѣ вышенаписанныя двухзначныя группы и къ *каждой* изъ нихъ приписать недостающіе элементы справа.

Такимъ образомъ получаемъ:

1 3 5	3 1 5	5 1 3	7 1 3
1 3 7	3 1 7	5 1 7	7 1 5
1 5 3	3 5 1	5 3 1	7 3 1
1 5 7	3 5 7	5 3 7	7 3 5
1 7 3	3 7 1	5 7 1	7 5 1
1 7 5	3 7 5	5 7 3	7 5 3

Всего $4 \times 3 \times 2 = 24$ группы.

Если задаться цѣлью найти всѣ подобныя группы изъ всѣхъ четырехъ данныхъ элементовъ, то придемъ опять къ извѣстнымъ намъ линейнымъ перестановкамъ.

Соединенія, о которыхъ мы сейчасъ говорили, носятъ названіе простыхъ **размѣщеній.**

Слѣдовательно, выше мы находили: 1) число простыхъ размѣщеній изъ 3-хъ элементовъ по 2; 2) изъ 4-хъ элементовъ по 2 и 3) изъ 4-хъ элементовъ по 3. Обозначаютъ число размѣщеній обыкновенно буквой A (по-французски *размѣщеніе*—Arrangement) съ двумя указателями справа—внизу и вверху.

Нижній указатель показываетъ число *всѣхъ* элементовъ, взятыхъ для размѣщеній, а верхній, по сколько такихъ элементовъ берется для каждой группы. Значитъ, выше мы нашли, что

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6; \quad A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12; \quad A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Вообще:

Если взято n элементовъ a, b, c, d, e, ... m, и изъ этихъ элементовъ составлены всевозможныя группы по k элементовъ, отличающіяся или самими элементами или только порядкомъ ихъ, то такія соединенія называются размѣщеніями.

Число размѣщеній изъ n элементовъ по k обозначается, согласно предыдущему, символомъ A_n^k. Каждое же подобное размѣщеніе носитъ также названіе *размѣщенія k-го порядка.* Размѣщенія во многихъ вопросахъ математики имѣютъ важное значеніе. Покажемъ общій пріемъ, какъ найти число размѣщеній изъ n элементовъ по k; другими словами,—чему равно A_n^k.

Число размѣщеній.

Пусть дано n элементовъ: a, b, c, d, e, ... m. Сколько можно изъ этихъ элементовъ составить размѣщеній k-го порядка (или размѣщеній изъ n элементовъ по k)?

Прежде всего замѣтимъ, что число размѣщеній изъ n элементовъ a, b, c, d, ... m *по одному* (или 1-го порядка) равно, очевидно, самому числу элементовъ, т. е.

$$A_n^1 = n.$$

Составимъ, теперь, всѣ размѣщенія 2-го порядка. Для этого, по предыдущему, чтобы получить ихъ всѣ безъ пропусковъ и повтореній, беремъ каждый элементъ поочередно и приставляемъ къ нему послѣдовательно по одному справа всѣ остальные $n-1$ элементовъ. Получимъ таблицу

$$\begin{array}{llll}
ab & ba & ca \ldots\ldots & ma \\
ac & bc & cb \ldots\ldots & mb \\
ad & bd & cd \ldots\ldots & mc \\
ae & be & ce \ldots\ldots & md \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
al & bl & cl \ldots\ldots & mi \\
am & bm & cm \ldots\ldots & ml
\end{array}$$

Разсматривая эту таблицу, легко показать, что въ ней находятся, дѣйствительно, *всѣ* размѣщенія 2-го порядка, ни одно не опущено и не повторено. Въ самомъ дѣлѣ, для полученія столбцовъ таблицы брались поочередно *всѣ* n элементовъ a, b, $c, \ldots m$ и къ *каждому* прибавлялись справа по одному остальные $n-1$ элементовъ. Значитъ, ни одно размѣщеніе не могло быть опущено. Но ни одно и не повторено, потому что сравнивая любыя два размѣщенія таблицы, мы находимъ, по закону ея составленія, что если эти размѣщенія находятся въ одномъ и томъ же столбцѣ, то они должны различаться послѣдними буквами, а если въ разныхъ столбцахъ, то они различаются первыми буквами. Итакъ, въ таблицѣ нѣтъ ни пропусковъ, ни повтореній. Для подсчета же содержащихся въ ней размѣщеній 2-го порядка достаточно замѣтить, что въ таблицѣ n столбцовъ, а каждый столбецъ содержитъ $n-1$ членовъ (т. е. въ таблицѣ $n-1$ строкъ).

Слѣдовательно,

$$A_n^2 = n(n-1).$$

Составимъ, далѣе, таблицу всѣхъ возможныхъ размѣщеній изъ n элементовъ по 3, или размѣщенія 3-го порядка. Для этого беремъ нашу таблицу размѣщеній 2-го порядка и къ каждому изъ размѣщеній этой таблицы приставляемъ справа поочередно по одному всѣ остальные $n-2$ элемента. Получается новая таблица:

$$
\begin{array}{llll}
abc & acb\ldots\ldots & bca\ldots & \ldots mla \\
abd & acd\ldots\ldots & bcd\ldots\ldots & mlb \\
abe & ace\ldots\ldots & bce\ldots\ldots & mlc \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
abl & acl\ldots\ldots & bcl\ldots\ldots & \ldots \\
abm & acm\ldots\ldots & bcm\ldots\ldots & mli
\end{array}
$$

Разсужденіями, подобными приведеннымъ относительно таблицы размѣщеній второго порядка, можно показать, что въ этой таблицѣ дѣйствительно содержатся всѣ размѣщенія изъ n элементовъ 3-го порядка безъ пропусковъ и повтореній. А такъ какъ изъ $n(n-1)$ двойныхъ размѣщеній каждое дало $n-2$ размѣщенія третьяго порядка, то число всѣхъ размѣщеній 3-го порядка изъ n элементовъ будетъ:

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2).$$

Для числа размѣщеній изъ n элементовъ по 4 разсужденіями, подобными предыдущимъ, получимъ

$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Точно также

$$A_n^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

И т. д. Какъ видимъ, числа, выражающія число размѣщеній изъ n элементовъ по 1, по 2, по 3, по 4 и т. д., составляются всѣ по одному закону: Каждое такое число состоитъ изъ множителей, первый изъ которыхъ есть n, а каждый слѣдующій на единицу меньше. Число множителей равно числу порядка размѣщеній, т. е. для размѣщеній изъ n элементовъ 2-го порядка имѣемъ, какъ видѣли, два множителя $n(n-1)$; для размѣщеній 3-го порядка—3 множителя: $n(n-1)(n-2)$ и т. д. Можно сказать и такъ, что первый множитель будетъ n, а послѣдній (для размѣщенія порядка k) будетъ $n-k+1$.

Остальные множители составятъ рядъ промежуточныхъ послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ между

$$n \text{ и } n-k+1.$$

Такимъ образомъ, для числа размѣщеній изъ n элементовъ по k будемъ имѣть общую формулу

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1),$$

т. е. *число размѣщеній изъ n элементовъ по k равно произведенію k множителей, изъ которыхъ первый равенъ n, а остальные уменьшаются послѣдовательно на 1.*

Общность приведенной формулы необходимо, впрочемъ, доказать болѣе строго, что желающій можетъ сдѣлать самъ, руководствуясь предыдущимъ или обратясь къ любому хорошему учебнику.

Полныя размѣщенія или размѣщенія съ повтореніями.

Возьмемъ n элементовъ

$$a,\ b,\ c,\ d\ldots\ldots i,\ l,\ m.$$

Читатель помнитъ, что при составленіи *простыхъ* размѣщеній 2-го, 3-го, 4-го и т. д. порядка мы руководились слѣдующимъ правиломъ: для полученія таблицы размѣщеній 2-го порядка брали каждую изъ буквъ и приставляли къ ней справа всѣ *остальныя*. Для полученія таблицы размѣщеній 3-го порядка

мы брали таблицу размѣщеній изъ n элементовъ по 2, и къ каждому такому размѣщенію приставляли справа по одной остальныя $n-2$ буквы (элемента) и т. д. Такимъ образомъ мы получали группы изъ n буквъ по 2, по 3 и т. д., которыя разнились или *порядкомъ* расположенія, или *выборомъ* элементовъ, но *повтореній* одного и того элемента въ такихъ группахъ не было.

Возьмемъ, теперь, тѣ же n буквъ $a, b, c, \ldots\ldots l, m$ и будемъ составлять изъ нихъ таблицы размѣщеній 2-го, 3-го, 4-го и т. д. порядка по болѣе общему закону, а именно: къ каждой буквѣ для полученія по 2 будемъ приписывать не остальныя $n-1$ буквъ, а *всѣ* буквы *безъ исключенія.*

Такимъ образомъ мы получимъ таблицу двойныхъ *полныхъ размѣщеній*, или *размѣщеній съ повтореніями*, ибо буквы въ размѣщеніяхъ могутъ повторяться.

aa	ab	$ac \ldots\ldots\ldots ai$	al	am
ba	bb	$bc \ldots\ldots\ldots bi$	bl	bm
ca	cb	$cc \ldots\ldots\ldots ci$	el	cm
.				.
ma	mb	$mc \ldots\ldots\ldots mi$	ml	mm

Число этихъ полныхъ размѣщеній изъ n элементовъ по 2 найти легко. Ясно, что каждая изъ n буквъ даетъ также и n размѣщеній, а потому всѣхъ размѣщеній съ повтореніями изъ n элементовъ по два будетъ $n \cdot n = n^2$. Или, обозначая число размѣщеній съ повтореніями изъ n элементовъ по 2 символомъ B_n^2, напишемъ, что

$$B_n^2 = n^2.$$

Составляемъ, далѣе, таблицу размѣщеній съ повтореніями изъ n элементовъ по 3. Для этого беремъ предыдущую таблицу полныхъ размѣщеній по 2 и къ каждому размѣщенію этой таблицы приписываемъ по одному справа *всѣ безъ исключенія* элементы. Такъ что двойное размѣщеніе aa дастъ n тройныхъ

$aaa \quad aab \quad aac \ldots\ldots aai \quad aal \quad aam$

Двойное размѣщеніе ab дастъ опять n тройныхъ:

$$aba \quad abb \quad abc \ldots\ldots abi \quad abl \quad abm$$

и т. д. Путемъ разсужденій, знакомыхъ намъ изъ предыдущей главы, легко доказать, что въ полученныхъ нами таблицахъ сочетаній нѣтъ ни пропусковъ, ни повтореній однихъ и тѣхъ же размѣщеній.

Каждое двойное размѣщеніе даетъ, какъ видимъ, n тройныхъ, но всѣхъ двойныхъ размѣщеній n^2, слѣдовательно, получается всего $n^2 \times n = {}^3$ тройныхъ полныхъ размѣщеній, или:

$$B_n^3 = n^3.$$

Точно также легко вывести, что

$$B_n^4 = n^4,\ B_n = n^5,\ B_n^6 = n^6 \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$B^k = n^k.$$

Задача 56-я.

Бросаютъ три игральныхъ кости. Сколькими способами онѣ могутъ вскрыться?

Рѣшеніе.

Игральная кость представляетъ собой костяной кубикъ, на каждой сторонѣ (грани) котораго обозначено извѣстное число «очковъ» (цифрой или точками). Такъ какъ въ кубикѣ шесть граней, то и числа очковъ будутъ на граняхъ кубика 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Зная это, легко рѣшить вопросъ. Каждая кость можетъ, упавъ, показать любую изъ 6-ти граней. Берется три такихъ кости. Число соединеній каждой съ каждой находятъ, очевидно, какъ число размѣщеній съ повтореніями изъ 6-ти элементовъ по 3. Т. е., подбросивъ 4 кости, мы можемъ получить одну изъ $6^3 = 216$ комбинацій.

Задача

Сколько можно написать трехзначныхъ чиселъ изъ десяти цифръ 1, 2, 3, ... ,9?

Рѣшеніе.

Очевидно, столько, сколько можно сдѣлать полныхъ (съ повтореніями) размѣщеній изъ 9 элементовъ по три, то есть

$$B_9^3 = 9^3 = 729.$$

Сочетанія.

Разсмотримъ еще виды соединеній, имѣющихъ постоянное приложеніе въ различныхъ отдѣлахъ математики:

Изъ n элементовъ a, b, c, d, ... m требуется составить, сколько возможно, такихъ группъ по k элементовъ, чтобы каждая отличалась отъ остальныхъ *по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ.*

Соединенія подобнаго рода носятъ въ математикѣ названіе простыхъ *сочетаній.* Какъ видимъ, здѣсь группы отличаются одна отъ другой не *порядкомъ,* а выборомъ элементовъ.

Число сочетаній изъ n элементовъ по k обозначается обыкновенно буквой C со значками справа n и k (вверху и внизу) слѣдующимъ образомъ C_n^k.

Раньше чѣмъ идти далѣе и показывать, какъ составлять таблицы сочетаній и находить число ихъ, сдѣлаемъ краткое замѣчаніе о всѣхъ видахъ соединеній, съ которыми мы познакомились.

Итакъ, мы знаемъ *перестановки, размѣщенія* и *сочетанія* и должны всегда помнить, что

перестановки P_n отличаются только *порядкомъ* элементовъ,

сочетанія $C_n^{\cdot}$ » » *выборомъ* »

размѣщенія $A_n^{\cdot}$ отличны или *порядкомъ* или *выборомъ* »

Составленіе сочетаній.

Берется n элементовъ: a, b, c, d, ... i, l, m. Это и будутъ, очевидно, сочетанія изъ n элементовъ по одному. Чтобы получить таблицу парныхъ сочетаній изъ тѣхъ же элементовъ, мы должны помнить, что каждое сочетаніе должно отличаться отъ другого хоть одной буквой. Для полученія подобныхъ группъ беремъ каждую данную намъ букву по порядку, *кромѣ послѣдней*, и къ каждой такой взятой буквѣ приписываемъ только по одной всѣ *слѣдующія* за ней. Получается таблица

ab	ac	ad	ae	ai	al	am
	bc	bd	be	bi	bl	bm
		cd	ce	ci	cl	cm
						. . . .
						. . . .
					il	im
						lm

Легко разобраться, что эту же таблицу мы получили бы, еслибъ взяли таблицу парныхъ размѣщеній изъ n элементовъ и выбросили бы изъ нея всѣ размѣщенія, отличающіяся только порядкомъ буквъ.

Для полученія тройныхъ сочетаній изъ n элементовъ беремъ каждое изъ вышенаписанныхъ двойныхъ сочетаній, кромѣ послѣдняго столбца, содержащаго послѣднюю букву (am, bm, cm . . . . . . lm), и приписываемъ къ каждому такому сочетанію послѣдовательно по одной *каждую изъ слѣдующихъ* буквъ. Получается таблица

abc	abd	abc	abl	abm
	acd	ace	acl	acm
				и т. д.

Словомъ, способъ послѣдовательнаго полученія таблицъ сочетаній изъ n элементовъ 2-го, 3-го, 4-го и т. д. порядковъ уяснить и усвоить не трудно. Но какъ подсчитать число полученныхъ при этомъ группъ?

Число сочетаній.

Если взять n элементовъ, то между числомъ сочетаній изъ этихъ n элементовъ по k, (C_n^k), числомъ размѣщеній изъ тѣхъ же n элементовъ по k, (A_n^k), и числомъ простыхъ перестановокъ изъ k элементовъ, (P_k), можно установить слѣдующее соотношеніе:

$$A_n^k = C_n^k . P^k,$$

т. е.:

Число размѣщеній изъ n элементовъ по k равно числу сочетаній изъ n элементовъ по k, умноженному на число перестановокъ изъ k элементовъ.

Чтобы установить это весьма важное соотношеніе, разсуждаемъ такъ:

Представимъ, что способомъ, описаннымъ только что выше, у насъ составлена таблица всѣхъ сочетаній изъ n элементовъ по k. Число ихъ означаемъ символомъ C_n^k. Вспомнимъ затѣмъ, что всѣ эти сочетанія отличаются другъ отъ друга не порядкомъ разстановки элементовъ, но самими элеменами (хоть однимъ изъ нихъ). Между тѣмъ размѣщенія изъ n элементовъ по k могутъ отличаться одно отъ другого и порядкомъ размѣщенія и самими элементами. Зная это, мы изъ таблицы всѣхъ *сочетаній* изъ n элементовъ по k можемъ получить таблицу всѣхъ *размѣщеній* изъ n элементовъ по k.

Для этого изъ нашей воображаемой таблицы сочетаній беремъ каждое сочетаніе (содержащее по k буквъ) и дѣлаемъ въ немъ всевозможныя *перестановки*. Число такихъ перестановокъ, полученныхъ изъ каждаго сочетанія, будетъ, какъ знаемъ, P_k, а такъ какъ всѣхъ сочетаній C_n^k, то, значитъ, мы получимъ всего $C_n^k . P_k$ группъ соединеній.

Покажемъ теперь, что такимъ путемъ мы получили именно таблицу всѣхъ размѣщеній изъ n элементовъ по k безъ пропусковъ и повтореній (Число такихъ размѣщеній, какъ знаемъ, обозначается A_n^k).

Въ самомъ дѣлѣ, если взять изъ составленной таблицы два члена, то: или они происходятъ отъ двухъ разныхъ сочетаній, и въ такомъ случаѣ различаются буквами; или же происходятъ изъ одного и того же сочетанія,—и въ такъ случаѣ разнятся порядкомъ буквъ. Слѣдовательно, и таблица не содержитъ повтореній. Въ ней нѣтъ и пропусковъ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ нѣкоторой членъ группы A_n^k, не обращая вниманія на порядокъ буквъ въ немъ. Этотъ членъ представляетъ нѣкоторое сочетаніе изъ m буквъ по k, и, слѣдевательно, если не обращать вниманія на порядокъ его буквъ, онъ находится въ группѣ C_n^k. Такъ какъ буквы этого сочетанія были перемѣщены всѣми возможными способами, то любой разсматриваемый членъ необходимо содержится въ числѣ полученныхъ размѣщеній.

Изъ всего вышесказаннаго ясно, что мы въ правѣ написать соотношеніе

$$A_n^k = C_n^k . P_k,$$

которое для числа сочетаній изъ n элементовъ по k даетъ выраженіе

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k},$$

или

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots k},$$

что словами можно выразить такъ: *число сочетаній изъ n элементовъ по k равно произведенію k цѣлыхъ чиселъ, послѣдовательно убывающихъ на 1 и первое изъ которыхъ есть n, дѣленному на произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до k.*

Задача 57-я.

Выборы въ комиссію.

Изъ 7 русскихъ и 4-хъ нѣмцевъ нужно составить комиссію въ 6 лицъ. Сколькими способами можно это

сдѣлать, если въ составъ комиссіи должно войти не болѣе и не менѣе, какъ 2 нѣмца?

Рѣшеніе.

Выборъ русскихъ можетъ быть сдѣланъ C_7^4 способами, а выборъ нѣмцевъ C_4^2 способами. Каждую группу первыхъ можно сочетать съ каждой группой вторыхъ. Для искомаго числа, значитъ, имѣемъ:

$$C_7^4 \cdot C_4^2 = 210.$$

Задача 58-я.

Изъ 4-хъ духовныхъ и 8-ми свѣтскихъ лицъ должна быть составлена комиссія въ 6 человѣкъ. Сколькими способами можетъ быть сдѣланъ выборъ, если: 1) въ составъ комиссіи должно входитъ только одно духовное лицо; 2) если въ нее должно войти по меньшей мѣрѣ одно духовное лицо?

Рѣшеніе.

Отвѣтъ на первый вопросъ есть, очевидно (см. предыдущую задачу),

$$4 \cdot C_8^5 = 224.$$

Во второмъ случаѣ дѣло нѣсколько сложнѣе: необходимо принять во вниманіе всѣ возможныя комбинаціи, такъ какъ комиссія можетъ состоять: изъ 1-го духовнаго и 5 свѣтскихъ, или изъ двухъ духовныхъ и 4-хъ свѣтскихъ, или изъ 3-хъ духовныхъ и 3-хъ свѣтскихъ, либо, наконецъ, изъ 4-хъ духовныхъ и 2-хъ свѣтскихъ. Совокупность всѣхъ возможныхъ при этомъ сочетаній дастъ

$$4 \cdot C_8^5 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 = 896.$$

Задача 59-я.

Сколькими способами 7 русскихъ и 7 французовъ могутъ размѣститься за столомъ такъ, чтобы не оказывалось двухъ французовъ рядомъ?

Рѣшеніе.

Если одинъ изъ русскихъ, напр., будетъ постоянно сидѣть на одномъ и томъ же мѣстѣ, то остальные русскіе могутъ перемѣщаться столькими способами, сколько можно сдѣлать перестановокъ изъ 6-ти элементовъ, т. е. P_6 способами. Каждой такой ихъ разсадкѣ будетъ соотвѣтствовать 7 мѣстъ, которыя могутъ быть заняты французами P_7 способами. Значитъ, искомое нами число будетъ

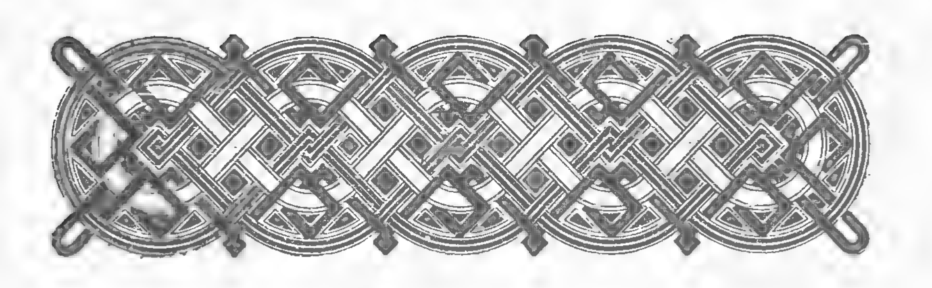
$$P_6 . P_7 = 3\,628\,800.$$

Задача 60-я.

Замокъ съ секретомъ состоитъ изъ трехъ колецъ съ 15-ю различными буквами каждое. Сколько безуспѣшныхъ попытокъ возможно сдѣлать раньше, чѣмъ отпереть замокъ?

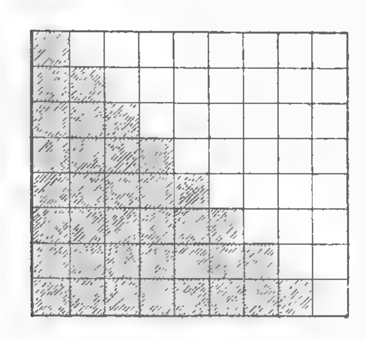
Рѣшеніе.

Первому кольцу можно дать 15 различныхъ положеній, столько же второму и столько же третьему. Всѣ эти положенія соединяются каждое съ каждымъ. Слѣдовательно, число различныхъ возможныхъ попытокъ открыть замокъ есть $15 \cdot 15 \cdot 15 = 3\,375$. Но изъ нихъ удачной можетъ быть только одна. Значитъ, число неудачныхъ равно 3 374.



Способъ шахматной доски.

Съ шахматной доской на протяженіи трехъ книгъ «Въ Царствѣ Смекалки» мы встрѣчались уже не разъ. Очень многіе, съ виду сложные, вопросы ариѳметики и алгебры рѣшаются весьма просто употребленіемъ шахматной доски. Слѣдуетъ только помнить, что подъ шахматной доской мы понимаемъ не одну обыкновенную шашечницу изъ 64-хъ клѣтокъ, но каждую квадратную или прямолинейную фигуру, раздѣленную на квадратныя клѣтки. Пользуясь такой доской, можно, напр., быстро рѣшить слѣдующія интересныя задачи.



Фиг. 100.

Задача 61-я.

Найти сумму n первыхъ цѣлыхъ натуральныхъ чиселъ по способу шахматной доски.

Рѣшеніе.

Для рѣшенія вопроса беремъ доску въ видѣ прямоугольника: высоту его дѣлимъ на n равныхъ частей, а основаніе на $n+1$ частей, т. е. наша фигура состоитъ изъ n горизонталей (линій) и $n+1$ вертикалей (колоннъ). На нашей фиг. 100-й имѣемъ 9 клѣтокъ по линіи и 8 въ колоннѣ (Всего $8 \cdot 9 = 72$ клѣтки).

Заштрихуемъ первую слѣва клѣтку 1-ой линіи, 2 первыхъ второй, 3 первыхъ третьей и т. д. Тогда все число заштрихованныхъ клѣтокъ выразится суммой

$$1+2+3+4+\ldots+n.$$

Но и число бѣлыхъ клѣтокъ, если его считать снизу вверхъ, тоже будетъ $1+2+3+4+\ldots+n$. Все же число клѣтокъ нашей доски равно $n(n+1)$. Слѣдовательно,

$$2\ (1+2+3+4\ \ldots+n)=n(n+1).$$

Отсюда для суммы n первыхъ натуральныхъ чиселъ имѣемъ

$$1+2+3+4+\ldots n=\frac{n\ (n+1)}{2}.$$

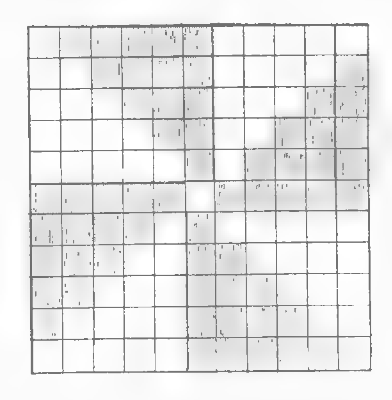
Задача 62-я.

Способомъ шахматной доски показать, что

$$8\ (1+2+3+4+\ldots+n)+1=(2n+1)^2.$$

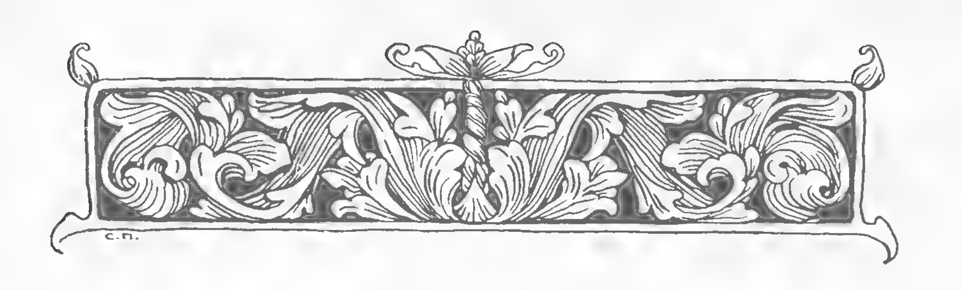
Рѣшеніе.

Беремъ квадратную доску, на которой каждая линія и каждая колонна состояла бы изъ $2n+1$ клѣтокъ. Оставивъ центральную клѣтку бѣлой, затемнимъ нѣкоторыя изъ остальныхъ такъ, какъ показано на фигурѣ 101. Каждая затемненная часть содержитъ, очевидно, $1+2+\ldots+n$ клѣтокъ. Внѣ центральной клѣтки имѣемъ 4 одинаковыхъ бѣлыхъ части. Слѣд., все число клѣтокъ фигуры, равное $(2n+1)^2$, слагается изъ четырехъ заштрихованныхъ частей, четырехъ такихъ же бѣлыхъ и изъ центральной клѣтки, т.-е.



Фиг. 101.

$$8\ (1+2+3+\ldots+n)+1=(2n+1)^2.$$



Отрывки изъ теоріи вѣроятностей.

...«Теорія вѣроятностей есть въ сущности не что иное, какъ здравый смыслъ, сведенный къ исчисленію: она заставляетъ оцѣнивать съ точностью то, что здраво развитые умы чувствуютъ какъ бы инстинктомъ, часто не умѣя дать себѣ въ этомъ отчетъ. Если принять во вниманіе аналитическіе методы, которые возникли изъ этой теоріи, истинность принциповъ, служащихъ ей основаніемъ, утонченную и изящную логику, которой требуетъ примѣненіе ихъ къ рѣшенію задачъ, учрежденія общественной пользы, опирающіяся на нее, и распространеніе, которое она получила и можетъ еще получить при примѣненіи ея къ важнѣйшимъ вопросамъ натуральной философіи и нравственныхъ наукъ; если, затѣмъ, замѣтить, что даже въ такихъ областяхъ, которыя не могутъ быть подчинены исчисленію, она даетъ самые вѣрные взгляды, которые могутъ нами руководить въ нашихъ сужденіяхъ, и что она насъ учитъ предохранять себя отъ иллюзій, которыя насъ часто сбиваютъ съ вѣрнаго пути,—мы увидимъ, что нѣтъ науки, болѣе достойной нашихъ размышленій, и что было бы очень полезно ввести ее въ систему народнаго просвѣщенія».

Такими словами великій Лапласъ заканчиваетъ свою знаменитую книгу «Опытъ философіи теоріи вѣроятностей», которую

рекомендуемъ вниманію каждаго (есть въ русскомъ переводѣ). Никто, за исключеніемъ развѣ Якова Бернулли, для теоріи вѣроятностей не сдѣлалъ до сихъ поръ столько, сколько Лапласъ, и никто съ бо̀льшимъ правомъ, чѣмъ онъ, не можетъ настаивать на необходимости самаго широкаго распространенія этой области математическихъ знаній. Впрочемъ, все болѣе и болѣе развивающаяся культурная жизнь народовъ лучше всего доказываетъ справедливость заключеній и требованій Лапласа. Развитіе всякаго рода систематической статистики, вычисленія, связанныя съ самыми тщательными измѣреніями, біометрія, различнаго рода страхованія, сдѣлавшіяся важнымъ факторомъ экономической и соціальной жизни широкихъ народныхъ массъ,— все это основано на математической теоріи вѣроятностей и лучше всего свидѣтельствуетъ о томъ значеніи, которое можетъ имѣть эта наука даже въ повседневномъ обиходѣ каждаго образованнаго человѣка. Мы не сомнѣваемся, что не такъ далеко время, когда теорія вѣроятностей изъ стѣнъ нѣкоторыхъ высшихъ и спеціальныхъ школъ перейдетъ во всѣ наши среднія школы. Сдѣлать это тѣмъ болѣе легко, что изложеніе элементовъ ученія о теоріи вѣроятностей не требуетъ введенія такъ называемой «высшей» математики. Подтвержденіемъ этого служитъ попытка (къ сожалѣнію, не вполнѣ законченная) проф. В. П. Ермакова. Въ 1884—85 году въ издававшемся имъ тогда «Журналѣ элементарной математики» уважаемый профессоръ помѣстилъ двѣ статьи изъ теоріи вѣроятностей въ элементарномъ изложеніи. Ниже мы даемъ вторую изъ нихъ, не сомнѣваясь, что подобное чтеніе доставитъ любителямъ математики помимо пользы и живѣйшее удовольствіе.

Русскимъ популяризаторомъ математическихъ знаній давно уже пора бы пойти по пути, указанному въ этомъ отношеніи нашимъ талантливымъ ученымъ, а педагогамъ заняться составленіемъ элементарнаго курса теоріи вѣроятностей, приноровленнаго къ школьнымъ требованіямъ. Сдѣлать это слѣдовало бы тѣмъ болѣе, что русская наука въ правѣ гордиться если не количествомъ, то качествомъ своихъ трудовъ въ области исчисленія вѣроятностей. Имена нашихъ академиковъ Буняковскаго, Чебышева и Маркова извѣстны всему ученому міру не одной

только Россіи. А нынѣ во славу науки здравствующій А. А. Марковъ создалъ, между прочимъ, курсъ «Исчисленіе Вѣроятностей», равнаго которому не найдется теперь во всей математической литературѣ (мы исключаемъ, конечно, изъ сравненія такіе классическіе труды по теоріи вѣроятностей, какъ Лапласа). Сжатый и мѣткій, но слишкомъ спеціальный, языкъ хотя бы того же А. А. Маркова остается только во многихъ случаяхъ опростить (не въ ущербъ, конечно, смыслу), а таинственные (съ виду) символы и формулы переложить на обыкновенный ариѳметическій языкъ, чтобы получить требуемое.

Въ нашемъ дальнѣйшемъ изложеніи мы не преслѣдуемъ, впрочемъ, систематически ни одной изъ изложенныхъ выше задачъ. Сущность и цѣль настоящей книги—не въ этомъ. Если рядомъ легкихъ и интересныхъ задачъ, историческими справками и отрывками изъ цѣнныхъ сочиненій по предмету мы дадимъ читателю истинное понятіе о предметѣ и подвигнемъ его къ чтенію и изученію предмета по оригинальнымъ сочиненіямъ, то наша цѣль будетъ вполнѣ и совершенно достигнута. Хорошо будетъ даже то, если многіе изъ читателей дадутъ себѣ ясный отчетъ въ томъ, что же это за столь употребительное слово... «**Вѣроятность**»...

Задача 63-я (Кавалера де-Мере).

Недоконченная игра.

Два игрока, поставивши поровну, начали игру, условившись, что тотъ, кто раньше выиграетъ извѣстное число партій, получитъ всю ставку. По нѣкоторымъ обстоятельствамъ игра не могла быть окончена и прекратилась въ тотъ моментъ, когда первому игроку не хватало до конца одной, а второму двухъ партій. Спрашивается, какъ игроки должны подѣлить ставку между собою?

Рѣшеніе.

Знаменитый Паскаль, о которомъ мы не разъ уже упоминали, рѣшилъ эту задачу слѣдующимъ разсужденіемъ:

Первый игрокъ говоритъ второму: «Половина ставки принадлежитъ мнѣ безспорно, такъ какъ даже въ томъ случаѣ, если бы ты выигралъ слѣдующую партію, наши шансы на полученіе цѣлой ставки были бы одинаковы. Что касается второй половины, то шансы наши на ея полученіе одинаковы, а потому раздѣлимъ ее пополамъ».

Значитъ, первый игрокъ получаетъ *три четверти*, а второй *одну* четверть всей ставки.

Само собой разумѣется, что оба игрока считаются совершенно равносильными другъ другу, что въ костяхъ или картахъ, или въ чемъ бы и чѣмъ бы они ни играли, нѣтъ никакой фальши,—словомъ,—окончательный результатъ игры зависитъ отъ **случая**, равновозможнаго для того и другого игрока,— и на этомъ-то зиждется все рѣшеніе задачи.

Что же такое *случай* и какъ понимать это слово?.. Впрочемъ объ этомъ придется говорить особо.

Игра въ кости и зачатки математической Теоріи Вѣроятностей.

Только что рѣшенная 63-я задача весьма знаменита въ лѣтописяхъ науки. Задачу эту въ 1654 году кавалеръ де-Мерè предложилъ для разрѣшенія своему другу, знаменитому Паскалю. Послѣдній рѣшилъ ее и для болѣе общаго случая, когда до конца первому игроку не хватаетъ, вообще говоря, m, а второму n партій. Рѣшивъ задачу самъ, Паскаль предложилъ рѣшить ее и своему не менѣе знаменитому современнику Ферма. Этотъ также не замедлилъ найти рѣшеніе задачи, но способомъ, отличнымъ отъ способа Паскаля (при помощи теоріи сочетаній) и притомъ уже не для двухъ только, а для любого числа игроковъ. По поводу каждаго изъ рѣшеній между великими математиками завязалась переписка и...

Такимъ образомъ были положены основанія математической теоріи вѣроятностей, которая съ этого времени дѣлаетъ весьма быстрые успѣхи.

Страстный игрокъ въ кости, кавалеръ де-Мере, какъ видимъ, поэтому также долженъ быть отнесенъ къ числу «основателей» теорiи вѣроятностей. Заслуга его состоитъ въ томъ, что онъ настойчиво заставлялъ математиковъ рѣшать различныя задачи, на которыя наталкивался самъ во время своей практики игры. Ниже мы приведемъ еще одну изъ задачъ де-Мере, предложенную тому же Паскалю и относящуюся тоже къ игрѣ въ кости, а потому необходимо нѣсколько ознакомиться съ понятiемъ объ этой игрѣ.

«Кость» въ данномъ случаѣ есть не что иное, какъ костяной кубикъ, на граняхъ котораго отмѣчены кружочки-очки: на одной грани—одно очко, на другой—два, на третьей—три и т. д. до шести (въ кубѣ 6 граней). Игра обыкновенно состоитъ въ выбрасыванiи одной или нѣсколькихъ костей и затѣмъ въ подсчетѣ суммы выпавшаго числа очковъ. Самый простой способъ игры тотъ, что выбросившiй наибольшее число очковъ получаетъ всю ставку, но ясно, что игру можно всячески разнообразить. При каждомъ новомъ условiи, вводимомъ въ игру, является вопросъ: для кого теперь изъ игроковъ существуетъ наиболѣе шансовъ выиграть. Такимъ образомъ возникали и создавались задачи, дѣлавшiяся достоянiемъ математиковъ, причемъ обыкновенно практика игроковъ сплошь и рядомъ обгоняла теоретическiе выводы математиковъ.

Страстному игроку, но плохому математику, кавалеру де-Мере посчастливилось имѣть такого друга, какъ Паскаль. Интересно отмѣтить здѣсь же, что за 50 лѣтъ до описаннаго нѣчто подобное имѣло мѣсто съ Галилеемъ: одинъ изъ его прiятелей также задавалъ ему задачи изъ практики игры въ кости, и генiальный ученый разрѣшалъ ихъ совершенно вѣрно. Вообще слѣдуетъ замѣтить, что всеобщее увлеченiе игрой въ кости въ Западной Европѣ въ 16-мъ и 17-мъ столѣтiяхъ привело задолго до Паскаля и Ферма къ рѣшенiю нѣкоторыхъ задачъ, имѣющихъ связь съ теорiей игръ, но только генiю этихъ ученыхъ удалось установить общiе методы и принципы для подчиненiя этого предмета исчисленiю.

О законности и случайности.

Обратимся еще разъ къ задачѣ кавалера де-Мере (зад. 63) и припомнимъ, что уже тамъ намъ пришлось остановиться на словѣ «*случай*». Слово это вообще играетъ большую роль какъ въ практикѣ, такъ и въ теоріи всякой игры, а потому надъ его выясненіемъ основатели математической теоріи вѣроятностей остановились прежде всего. Чтобы показать, къ чему привели изслѣдованія въ этомъ направленіи, лучше всего привести слѣдующія страницы изъ «Опыта философіи теоріи вѣроятностей» Лапласа:

«Всѣ явленія, даже тѣ, которыя по своей незначительности какъ будто не зависятъ отъ великихъ законовъ природы, суть слѣдствія столь же неизбѣжныя этихъ законовъ, какъ обращеніе солнца. Не зная узъ, соединяющихъ ихъ съ системой міра въ ея цѣломъ, ихъ приписываютъ конечнымъ причинамъ или случаю, въ зависимости отъ того, происходили ли и слѣдовали ли они одно за другимъ съ извѣстною правильностью, или же безъ видимаго порядка; но эти мнимыя причины отбрасывались, по мѣрѣ того какъ расширялись границы нашего знанія, и совершенно исчезли передъ здравой философіей, которая видитъ въ нихъ лишь проявленіе невѣдѣнія, истинная причина котораго—мы сами.

«Всякое имѣющее мѣсто явленіе связано съ предшествующимъ на основаніи того очевиднаго принципа, что какое-либо явленіе не можетъ возникнуть безъ производящей его причины. Эта аксіома, извѣстная подъ именемъ «*принципа достаточнаго основанія*», распространяется даже на дѣйствія, считаемыя безразличными. Воля, самая свободная, не можетъ породить эти дѣйствія безъ побуждающей причины, потому что, если бы она дѣйствовала въ одномъ случаѣ и воздерживалась отъ дѣйствія въ другомъ, при полномъ подобіи всѣхъ обстоятельствъ обоихъ положеній, то выборъ ея былъ бы дѣйствіемъ безъ причины: она была бы, какъ сказалъ Лейбницъ, слѣпымъ случаемъ эпикурейцевъ. Противоположное мнѣніе есть иллюзія ума, который, теряя изъ виду мелкія причины того или дру-

гого выбора воли въ безразличныхъ, поступкахъ, убѣждается, что она опредѣляется самою собою и безпричинна.

«Такимъ образомъ мы должны разсматривать настоящее состояніе вселенной какъ слѣдствіе ея предыдущаго состоянія и какъ причину послѣдующаго.

«Умъ, которому были бы извѣстны для какого-либо даннаго момента всѣ силы, одушевляющія природу, и относительное положеніе всѣхъ ея составныхъ частей, если бы вдобавокъ онъ оказался достаточно обширнымъ, чтобы подчинить эти данныя анализу, обнялъ бы въ одной формулѣ движенія величайшихъ тѣлъ вселенной наравнѣ съ движеніемъ легчайшихъ атомовъ: не осталось бы ничего, что было бы для него недостовѣрно, и будущее, такъ же какъ и прошедшее, предстало бы передъ его взоромъ. Умъ человѣческій въ совершенствѣ, которое онъ сумѣлъ придать астрономіи, даетъ намъ представленіе о слабомъ набраскѣ подобнаго разума. Его открытія въ механикѣ и геометріи въ соединеніи съ открытіемъ всемірнаго тяготѣнія сдѣлали его способнымъ понимать подъ одними и тѣми же аналитическими выраженіями прошедшія и будущія состоянія міровой системы. Примѣняя тотъ же методъ къ нѣкоторымъ другимъ объектамъ знанія, нашему разуму удалось подвести наблюдаемыя явленія подъ общіе законы и предвидѣть явленія, которыя будутъ вызваны данными условіями. Всѣ усилія духа въ поискахъ истины постоянно стремятся приблизить его къ Разуму, о которомъ мы только что упоминали, но отъ котораго онъ останется всегда безконечно далекимъ. Это стремленіе, свойственное роду человѣческому, возвышаетъ его надъ животными; и успѣхи его въ этомъ направленіи различаютъ націи и вѣка и составляютъ ихъ истинную славу.

«Припомнимъ, что въ былое время, въ эпоху не очень отъ насъ отдаленную, на дождь или на чрезвычайную засуху, на комету съ сильно растянутымъ хвостомъ, на солнечное затменіе, на сѣверное сіяніе и вообще на необычайныя явленія смотрѣли какъ на знакъ небеснаго гнѣва. Взывали къ небу, чтобы отвратить ихъ пагубное вліяніе. Небо не молили остановить движеніе планетъ или солнца: наблюденіе скоро дало бы почувствовать всю безполезность такихъ моленій. Но, такъ какъ

тѣ явленія, наступающія и исчезающія черезъ длинные промежутки времени, казалось, противорѣчили порядку, установившемуся въ природѣ, то люди предположили, что небо порождало и измѣняло ихъ по своему усмотрѣнію въ наказаніе земныхъ грѣховъ. Такъ длинный хвостъ кометы 1456-го года произвелъ панику въ Европѣ, уже приведенной въ ужасъ быстрыми побѣдами турокъ, отъ которыхъ только что пала Византійская имперія. Послѣ того какъ это небесное свѣтило совершило четыре своихъ обращенія, оно возбудило среди насъ очень различный интересъ. Знакомство съ законами системы міра, пріобрѣтенное за этотъ промежутокъ времени, разсѣяло страхъ, порожденный незнаніемъ истинныхъ отношеній человѣка ко вселенной; и Галей (Halley), признавъ тождество этой кометы съ кометою 1531-го, 1607-го и 1682-го годовъ, предсказалъ слѣдующее ея возвращеніе въ концѣ 1758-го или въ началѣ 1759-го года. Ученый міръ ждалъ съ нетерпѣніемъ этого возвращенія, долженствовавшаго подтвердить одно изъ самыхъ великихъ открытій, сдѣланныхъ въ наукѣ, и исполнить предсказаніе Сенеки, сказавшаго объ обращеніи небесныхъ свѣтилъ, которыя спускаются изъ громадныхъ разстояній: «Наступитъ день, когда, благодаря длившемуся нѣсколько столѣтій изученію, вещи, нынѣ скрытыя, явятся со всею своею очевидностью; и потомки наши изумятся, что столь очевидныя истины ускользали отъ насъ». Тогда Клэро (Clairaut) взялся подвергнуть анализу тѣ возмущенія, которыя комета испытала подъ вліяніемъ двухъ самыхъ большихъ планетъ—Юпитера и Сатурна: послѣ громадныхъ вычисленій онъ назначилъ ея ближайшее прохожденіе черезъ перигелій на начало апрѣля 1759-го года, и наблюденіе не замедлило подтвердить это. Правильность, которую обнаруживаетъ намъ астрономія, безъ всякаго сомнѣнія имѣетъ мѣсто во всѣхъ явленіяхъ. Кривая, описанная простою молекулою воздуха или пара, опредѣлена такъ же точно, какъ и орбиты планетъ: разницу межъ ними дѣлаетъ только наше незнаніе».

Итакъ «случая» и случайныхъ явленій, въ сущности говоря, нѣтъ. Все зависитъ только отъ мѣры и степени нашего

знанія. И нѣкоторыя совершающіяся на нашихъ глазахъ явленія мы называемъ *случайными* только потому, что всѣхъ причинъ и законовъ, вызывающихъ непрѣменное появленіе именно этого, а не другого, событія, мы не въ состояніи изучить и учесть. Другими словами:

Явленія, которыхъ мы съ точностью предусмотрѣть или предсказать не можемъ,—потому ли, что еще не знаемъ ихъ причинъ, или потому, что эти причины слишкомъ сложны и разнообразны,—мы называемъ явленіями случайными.

Положимъ, напримѣръ, что мы бросаемъ монету. Можетъ выпасть орелъ, можетъ выпасть и решетка. То и другое изъ этихъ двухъ явленій произойдетъ на основаніи общихъ физическихъ законовъ, и будетъ зависѣть отъ толчка, который мы дадимъ монетѣ при бросаніи, вѣса и формы монеты, сопротивленія воздуха и прочихъ условій. Всѣ эти условія, однако, столь разнообразны, многочисленны и сложны, что нѣтъ возможности обращаться къ ихъ изслѣдованію для того, чтобы предсказать, чѣмъ закончится процессъ бросанія монетъ: орломъ или решеткой. Мы и говоримъ, что вскрытіе орла или вскрытіе решетки суть явленія случайныя.

Опредѣленіе математической вѣроятности событія.

Мы не въ состояніи ничего точно предсказать напередъ о появленіи того или иного случайнаго событія. Однако появленіе многихъ изъ такихъ событій (напр.: рожденіе, смерть, болѣзни, увѣчья, преступленія, пожары, градъ, засуха, дождь и т. д., и т. д.) часто сопровождается для насъ такими матерьяльными или моральными выгодами или ущербомъ, что знать о томъ, случится ли нѣкоторое событіе или нѣтъ, для насъ весьма важно.

Не имѣя возможности судить о появленіи ожидаемаго событія *достовѣрно*, мы стараемся, все же, найти какія-либо (въ большинствѣ случаевъ—опытныя) данныя, которыя позволили бы намъ съ нѣкоторыми безспорными основаніями утвер-

ждать, что одни изъ этихъ событій болѣе, а другія менѣе **вѣроятны**. Изъ области гаданій, выражающихся въ насмѣшливой, всѣмъ извѣстной, поговоркѣ «либо дождикъ, либо снѣгъ,—либо будетъ, либо нѣтъ»,—мы переходимъ въ область вѣроятности, составляющей нѣчто среднее между абсолютнымъ случаемъ и полной достовѣрностью. Знать степень вѣроятности случайнаго событія уже много значитъ. Извѣстно, напр., что для предотвращенія случайныхъ матеріальныхъ убытковъ устраиваются разнаго рода страховыя общества, какъ-то: общества страхованія отъ пожара, отъ кораблекрушенія, отъ градобитія, страхованія пожизненныхъ капиталовъ и доходовъ. Эти общества за незначительную ежегодную плату обязуются возмѣщать убытки, происшедшіе отъ несчастныхъ случаевъ. Всѣ страховыя общества основываютъ свои расчеты также на вѣроятности тѣхъ или другихъ событій и сообразно съ вѣроятностью ихъ берутъ страховую премію. Данныя, на основаніи которыхъ опредѣляются вѣроятности случайныхъ событій, берутся изъ наблюденій надъ появленіемъ этихъ событій въ дѣйствительной жизни, для чего обыкновенно собираются статистическія свѣдѣнія за болѣе или менѣе продолжительное время.

Теперь самъ собою напрашивается вопросъ: какъ же *математически* учесть вѣроятность, какъ условиться въ томъ, какими *числами* мы будемъ выражать вѣроятности событій или явленій?

Условимся прежде всего въ словахъ и терминахъ.

Два слова въ первоначальной теоріи вѣроятности встрѣчаются наиболѣе часто, а именно: **событіе** и **случай**. Всякое отдѣльное явленіе при какомъ либо опытѣ или наблюденіи мы будемъ называть *случаемъ*, но замѣтимъ при этомъ, что во многихъ сочиненіяхъ по теоріи вѣроятностей вмѣсто этого слова употребляютъ также термины **статочность** или **шансъ**.

Въ представляющемся намъ цѣломъ рядѣ случаевъ (статочностей, шансовъ) могутъ быть случаи однородные и разнородные,—это надо всегда имѣть въ виду.

Появленіе каждаго изъ однородныхъ случаевъ будемъ называть **событіемъ**.

Напр., возьмемъ урну, въ которой заключаются десять бѣлыхъ, пять черныхъ и три красныхъ шара. Вынимаемъ на удачу одинъ шаръ изъ этой урны. При этомъ мы ожидаемъ 18 *случаевъ* (статочностей)—это появленіе каждаго шара въ отдѣльности—и только одного изъ трехъ *событій*: появленія бѣлаго, чернаго или краснаго шара.

Для большей простоты дѣлаемъ ограниченія: во-первыхъ, мы будемъ разсматривать только **равновозможные случаи.** Мы называемъ случаи равновозможными, когда нѣтъ никакой причины отдать предпочтеніе появленію одного случая передъ другимъ. Во-вторыхъ, будемъ полагать, что въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ не можетъ появиться болѣе одного событія. Кромѣ того предполагаемъ, что случаи (статочности) **несовмѣстимы**, т. е.—если имѣетъ мѣсто одинъ случай, то одновременно не можетъ быть другого.

Теперь не трудно придти къ заключенію, что вѣроятность событія зависитъ какъ отъ числа случаевъ, благопріятныхъ появленію ожидаемаго событія, такъ и отъ числа случаевъ, неблагопріятныхъ этому событію; съ возрастаніемъ перваго числа вѣроятность событія увеличивается, съ возрастаніемъ второго она уменшается. Опредѣленіе вѣроятности сводится, значитъ, къ точному подсчету всѣхъ случаевъ, при которыхъ событіе можетъ наступить.

Пусть m означаетъ полное число равновозможныхъ случаевъ при данномъ наблюденіи, а n—число тѣхъ изъ нихъ, которые благопріятны появленію ожидаемаго событія. Легко видѣть, что вѣроятность событія увеличивается и уменьшается при тѣхъ же самыхъ обстоятельствахъ, какъ и дробь $\frac{n}{m}$. Отсюда вытекаетъ слѣдующее наиболѣе простое опредѣленіе математической вѣроятности:

Вѣроятность событія измѣряется дробью, числитель которой равенъ числу случаевъ, благопріятныхъ появленію событія, а знаменатель—числу всѣхъ случаевъ, могущихъ появиться при данномъ наблюденіи.

Нѣкоторыя слѣдствія, вытекающія изъ опредѣленія математической вѣроятности.— Вѣроятность и достовѣрность.

Изъ даннаго только что выше опредѣленія математической вѣроятности появленія какого-либо событія слѣдуетъ, что вѣроятность эта увеличивается и уменьшается одновременно съ увеличеніемъ и уменьшеніемъ дроби $\frac{n}{m}$, гдѣ m означаетъ число *всѣхъ* равновозможныхъ случаевъ, а n—число случаевъ, благопріятныхъ появленію ожидаемаго событія. Но при этомъ необходимо всегда помнить, что, если двѣ величины одновременно увеличиваются и уменьшаются, то отсюда еще *не слѣдуетъ,* чтобы эти величины были равны или даже пропорціональны. Итакъ, данное выше опредѣленіе вѣроятности *есть совершенно произвольное*. Можно было бы дать много другихъ опредѣленій: напр., вѣроятность можно опредѣлить какъ отношеніе числа благопріятныхъ къ числу неблагопріятныхъ случаевъ. Нужно однако же замѣтить, что *данное опредѣленіе есть простѣйшее изъ всѣхъ возможныхъ*. Само собою разумѣется, что при другомъ опредѣленіи вѣроятности всѣ формулы теоріи вѣроятности были бы иныя.

Дробь $\frac{n}{m}$, которую мы приняли, какъ мѣру математической вѣроятности, можетъ принимать всѣ значенія между нулемъ и единицей.

Вѣроятность равна единицѣ, когда $n = m$, т. е. когда всѣ случаи благопріятны появленію ожидаемаго событія, и тогда событіе достовѣрно, т. е. оно должно непремѣнно случиться. Отсюда слѣдуетъ, что *за единицу мѣры вѣроятностей мы принимаемъ вѣроятность достовѣрнаго событія.*

Вѣроятность обращается въ нуль, когда $n = 0$, т. е. когда совсѣмъ нѣтъ случаевъ, благопріятныхъ для появленія событія. Въ такомъ случаѣ событіе не появится вовсе. Слѣдовательно, *если вѣроятность равна нулю, то событіе вовсе не появится.*

Пусть n означаетъ число благопріятныхъ появленію ожидае-

маго событія, а m число всѣхъ возможныхъ случаевъ. Вѣроятность появленія ожидаемаго событія выразится, какъ мы знаемъ, дробью $\frac{n}{m}$. Вѣроятность появленія того же событія выразиться дробью $\frac{m-n}{m}$. Означимъ первую вѣроятность черезъ p, тогда вторая будетъ $1-p$. Отсюда заключаемъ слѣдующее:

Если вѣроятность появленія событія есть p, *то вѣроятность непоявленія того же событія есть* $1-p$.

Для надлежащаго усвоенія теоріи вѣроятностей необходимо прежде всего умѣнье вычислять вѣроятность различныхъ событій. При этомъ учетъ шансовъ (случаевъ, статочностей) долженъ дѣлаться со всей возможной осторожностью и внимательностью: 1) Слѣдуетъ сосчитать всѣ *возможные* случаи, ни одинъ случай не долженъ быть пропущенъ; 2) случаи должны быть *равновозможны*; 3) они должны быть *несовмѣстимы*. Надо замѣтить, однако, что вычисленіе вѣроятности различныхъ событій не такъ легко и просто, какъ можетъ показаться иному на первый взглядъ. Теорія соединеній и сочетаній часто оказываетъ здѣсь могущественную помощь. Но сложность условій, при которыхъ можетъ появиться ожидаемое событіе, а иногда просто невозможность опредѣлить число благопріятныхъ или даже всѣхъ случаевъ часто создаютъ для точнаго рѣшенія задачи неодолимыя трудности. Но самыя эти трудности, сложность и тонкость вопросовъ всегда привлекали къ теоріи вѣроятностей всѣ выдающіеся умы. И, быть можетъ, ни одна область въ математикѣ не вызывала такихъ оживленныхъ споровъ и глубоко интересныхъ разсужденій среди ученыхъ всѣхъ народовъ, начиная съ Галилея, Паскаля и Ферма, какъ именно эта Теорія Вѣроятностей.

Теперь мы можемъ приступить къ рѣшенію нѣкоторыхъ простыхъ задачъ, относящихся къ исчисленію случаевъ и опредѣленію вѣроятности нѣкоторыхъ событій. Остановимся также на нѣкоторыхъ такихъ вопросахъ, гдѣ скрытая малѣйшая неточность въ заданіи влечетъ за собой двусмысленныя рѣшенія,—получается родъ софизмовъ изъ теоріи вѣроятностей.

Задача 64-я.

Орлянка.

Подбрасывается монета одинъ разъ. Какова вѣроятность, что выпадетъ орелъ?

Рѣшеніе.

Въ этой задачѣ, какъ и во всѣхъ дальнѣйшихъ, предполагается, что монета совершенно однородна, стороны ея совершенно подобны, и что вообще въ ней самой нѣтъ никакихъ физическихъ причинъ, заставляющихъ ее падать на одну сторону предпочтительнѣе, чѣмъ на другую. Тогда мы имѣемъ здѣсь всего два равновозможныхъ случая: либо орелъ, либо решетка; а за выпаденіе орла имѣется, значитъ одинъ благопріятный шансъ. Итакъ, по опредѣленію математической вѣроятности, вѣроятность появленія орла есть $\frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$.

Напомнимъ еще разъ, что математическую вѣроятность наступленія ожидаемаго событія мы опредѣлили, какъ дробь, въ знаменателѣ которой стоитъ число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, а въ числителѣ—число случаевъ благопріятныхъ появленію событія.

Задача 65-я.

Двукратное бросаніе монеты.

Монета подбрасывается вверхъ 2 раза. Какова вѣроятность, что при этомъ двукратномъ подбрасываніи хотя одинъ разъ появится орелъ?

Рѣшеніе.

Подсчитываемъ всѣ возможные случаи. Можетъ случиться, что: 1) орелъ появится при 1-мъ и 2-мъ бросаніи; 2) орелъ при первомъ и решетка при второмъ бросаніи; 3) решетка при первомъ и орелъ при второмъ бросаніи; 4) решетка при 1-мъ и 2-мъ бросаніи. Всего 4 случая и случая равновозможныхъ.

Въ трехъ изъ нихъ можетъ появляться орелъ. Значитъ благопріятныхъ появленію орла случаевъ 3, а потому, по опредѣленію для искомой вѣроятности, имѣемъ $\frac{3}{4}$.

Отыскать число всѣхъ случаевъ можно было бы, исходя и изъ такого соображенія. При первомъ бросаніи монеты имѣемъ 2 равновозможныхъ случая, при второмъ также 2. И каждый изъ этихъ двухъ случаевъ всячески сочетается съ 2-мя другими. Значитъ число всѣхъ случаевъ есть $2 \times 2 = 4$. Находимъ, затѣмъ, число случаевъ, благопріятныхъ появленію орла, и приходимъ опять къ найденному уже рѣшенію задачи.

Задача 66-я.

N-кратное бросаніе монеты.

Монету подбрасываютъ послѣдовательно n разъ. Какова вѣроятность, что орелъ и решетка будутъ появляться въ извѣстномъ, напередъ заданномъ, порядкѣ?

Рѣшеніе.

Появленіе орла или решетки равновозможно при каждомъ бросаніи, т. е. при каждомъ бросаніи имѣемъ 2 равновозможныхъ случая. Но всѣхъ бросаній n, — значитъ, при каждомъ новомъ бросаніи каждые новые два случая будутъ сочетаться со всѣми предыдущими.

Такъ: при 1-мъ бросаніи имѣемъ 2 случая.
» 2-мъ » » $2 \cdot 2 = 2^2$
» 3-мъ » » $2^2 \cdot 2 = 2^3$
. . . .
» n-мъ » » $2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$.

Итакъ, всѣхъ случаевъ 2^n.

Сколько же случаевъ, благопріятствующихъ наступленію спрашиваемаго *событія?* Одинъ.

Итакъ, искомая вѣроятность есть $\frac{1}{2^n}$.

Приложеніе къ рулеткѣ.

Совершенно такая же, какъ въ предыдущей задачѣ, вѣроятность получается для появленія въ извѣстномъ порядкѣ краснаго и чернаго на рулеткѣ (rouge-et-noire).

Напримѣръ: *какова вѣроятность, что, показавъ въ 1-й разъ красные, рулетка вслѣдъ затѣмъ слѣдующіе 29 ударовъ будетъ каждый разъ послѣдовательно мѣнять цвѣтъ?*

По предыдущему, для такой вѣроятности, находимъ:

$$\frac{1}{2^{30}}=0{,}0000000093133.$$

Если принять, что послѣдовательный рядъ появленія краснаго и чернаго можетъ начаться все равно съ какого, краснаго или чернаго, цвѣта, то данное число для вѣроятности надо помножить на 2.

Задача 67-я.

Бросаніе одной кости.

Бросается игральная кость. Опредѣлить величину вѣроятности, что выпадетъ 4 очка.

Рѣшеніе.

Въ игральной кости (кубикѣ) шесть граней. и на нихъ отмѣчены очки отъ 1 до 6.

Подброшенная кость можетъ лечь вверхъ любой изъ этихъ шести граней и показать любое число очковъ отъ 1 до 6. Итакъ имѣемъ всего 6 равновозможныхъ случаевъ. Появленію же 4-хъ очковъ благопріятствуетъ только 1. Слѣдовательно, вѣроятность того, что выпадетъ именно 4 очка, равна $\frac{1}{6}$.

Въ случаѣ метанія одной кости та же вѣроятность, $\frac{1}{6}$, будетъ и для выпаденія всѣхъ остальныхъ очковъ кости.

Если же мы станемъ одновременно подбрасывать 2 кости, то вопросъ, какъ сейчасъ увидимъ, получаетъ нѣсколько болѣе сложный характеръ.

Задача 68-я.

2 кости.

Какъ велика вѣроятность получить 8 очковъ, бросивъ двѣ кости одинъ разъ?

Рѣшеніе.

Подсчитать число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, могущихъ получиться при бросаніи 2-хъ костей не трудно, исходя изъ такихъ соображеній: каждая изъ костей при бросаніи даетъ одинъ изъ 6 равновозможныхъ для нея случаевъ. Шесть такихъ случаевъ для одной кости сочетаются всѣми способами съ 6-ю же случаями для другой кости, и такимъ образомъ получается всего для 2-хъ костей $6 \times 6 = 6^2 = 36$ равновозможныхъ случаевъ. Остается подсчитать число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, благопріятствующихъ появленію суммы 8. Здѣсь дѣло уже нѣсколько осложняется.

Мы должны сообразить, что при 2 костяхъ сумма 8 можетъ выброситься только слѣдующими способами:

1)	первая	кость	4	очк.,	вторая	кость	4	очка.
2)	»	»	6	»	»	»	2	»
3)	»	»	2	»	»	»	6	»
4)	»	»	5	»	»	»	3	»
5)	»	»	3	»	»	»	5	»

Итого случаевъ, благопріятныхъ ожидаемому событію, имѣемъ 5. Слѣдовательно, искомая вѣроятность, что кости выбросятъ въ суммѣ 8 очковъ, равна $\frac{5}{36}$.

Замѣчаніе. — Для полнаго уясненія дѣла полезно составить табличку всѣхъ 36 комбинацій, которыя могутъ получиться при бросаніи 2-хъ костей, и разобраться въ ней. Для ясности изобразимъ очки первой кости римскими цифрами, а очки второй — арабскими. Иогда всѣ 36 случаввъ, которые могутъ представиться при бросаніи двухъ костей, могутъ быть представлены слѣдующей квадратной табличкой (фиг. 102).

I, 1	I, 2	I, 3	I, 4	I, 5	I, 6
II, 1	II, 2	II, 3	II, 4	II, 5	II, 6
III, 1	III, 2	III, 3	III, 4	III, 5	III, 6
IV, 1	IV, 2	IV, 3	IV, 4	IV, 5	IV, 6
V, 1	V, 2	V, 3	V, 4	V, 5	V, 6
VI, 1	VI, 2	VI, 3	VI, 4	VI, 5	VI, 6

Фиг. 102.

Сумма чиселъ каждой клѣтки этой фигуры даетъ сумму очковъ двухъ костей при каждомъ изъ 36 равновозможныхъ случаевъ, какъ они могутъ выпасть.

Разсматривая эти суммы по всѣмъ діагоналямъ справа налѣво и сверху внизъ, мы тотчасъ убѣждаемся, насколько разнятся числа случаевъ благопріятныхъ для выпаденія той или другой суммы очковъ. Главная діагональ справа налѣво тотчасъ показываетъ намъ, что наиболѣе шансовъ для выпада при двухъ костяхъ имѣетъ число 7, а именно число это можетъ составиться 6-ю различными комбинаціями двухъ костей:

$$\mathrm{I}+6,\ \mathrm{II}+5,\ \mathrm{III}+4,\ \mathrm{IV}+3,\ \mathrm{V}+2,\ \mathrm{VI}+1.$$

Слѣдовательно, вѣроятность выпада этого числа очковъ при бросаніи 2-хъ костей равна $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Изъ таблицы тотчасъ видно, что для выпада

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 очковъ

соотвѣтственныя вѣроятности будутъ:

$$\frac{1}{36},\ \frac{1}{18},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{9},\ \frac{5}{36},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{36},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{18} \text{ и } \frac{1}{36}.$$

По главной діагонали слѣва направо въ табличкѣ идутъ *дублеты*, т. е. случаи, когда обѣ кости одновременно показываютъ одно и то же число очковъ. Ясно, что вѣрность полученія любого изъ дублетовъ равна $\frac{1}{36}$.

Задача 69-я.

Какова вѣроятность, что, бросая n разъ одну шестигранную кость, мы получимъ n разъ подрядъ очко 3?

Рѣшеніе.

6 случаевъ равновозможныхъ при каждомъ бросаніи. Слѣдовательно, при

1-мъ	бросаніи	имѣемъ	6	случаевъ
2-мъ	»	»	$6 \cdot 6 = 6^2$	случаевъ
3-мъ	»	»	$6^2 \cdot 6 = 6^3$	»
.				. . . . .
n-мъ	»	»	$6^{n-1} \cdot 6 = 6^n$	»

Итакъ, всего при n послѣдовательныхъ бросаніяхъ получается 6^n случаевъ.

Спрашивается же наступленіе такого событія, появленію котораго каждый разъ благопріятствуетъ только одинъ случай.

Искомая вѣроятность есть $\frac{1}{6^n}$.

Задача 70-я.

Бросаютъ 2 кости три раза. Какова вѣроятность, что хотя одинъ разъ выпадетъ дублетъ (т. е. на обѣихъ костяхъ будетъ одинаковое количество очковъ).

Рѣшеніе.

Всѣхъ равновозможныхъ случаевъ будетъ $36^3 = 46\,656$. Дублетовъ при 2 костяхъ шесть: 1 и 1, 2 и 2, 3 и 3, 4 и 4, 5 и 5, 6 и 6, и при каждомъ ударѣ возможно появленіе какого либо

изъ нихъ. Итакъ, изъ 36 случаевъ при каждомъ ударѣ 30 ни въ коемъ случаѣ не даютъ дублета. При трехъ же бросаніяхъ получается $30^3 = 27\,000$ недублетныхъ случая. Случаевъ же, благопріятствующихъ появленію дублета, будетъ, значитъ,

$$36^3 - 30^3 = 19\,656.$$

Искомая вѣроятность есть

$$\frac{19\,656}{46\,656} = 0{,}421\,296.$$

Задача 71-я.

Бросаютъ n разъ 2 кости. Какова вѣроятность, что получится n разъ сумма по 7 очковъ?

Рѣшеніе.

При n бросаніяхъ равновозможны 36^n случаевъ. При каждомъ бросаніи появленію требуемаго событія благопріятствуетъ 6 случаевъ. Всего при n бросаніяхъ благопріятствующихъ случаевъ будетъ, слѣдовательно, 6^n.

Вѣроятность искомаго событія:

$$\frac{6^n}{36^n} = \frac{1}{6^n}.$$

Замѣчаніе. Полученная вѣроятность одинакова съ вѣроятностью выбрасыванья одной и той же грани при n бросаніяхъ одной кости.

Задача 72-я.

Карты.

Изъ колоды картъ вынимается одна карта. Опредѣлить вѣроятность появленія: 1) пиковой дамы, 2) какого либо туза, 3) карты червонной масти, 4) какой-либо фигуры.

Рѣшеніе.

Замѣтивъ, что въ колодѣ 52 карты, и что среди этихъ картъ находится: 1 пиковая дама, 4 туза, 13 картъ червонной масти и 12 фигуръ, находимъ для искомыхъ вѣроятностей соотвѣтственно:

$$1)\ \frac{1}{52};\ 2)\ \frac{4}{52}=\frac{1}{13};\ 3)\ \frac{13}{52}=\frac{1}{4};\ 4)\ \frac{12}{52}=\frac{3}{13}.$$

Задача 73-я.

Еще одна задача кавалера де-Мере.

Опредѣлить вѣроятность, при которой, бросивъ n разъ подъ-рядъ 2 кости, получимъ хотя разъ 12 очковъ («Sonnez»).

Рѣшеніе.

При каждомъ бросаніи двухъ костей возможно 36 расположеній ихъ, но 35 изъ нихъ дадутъ непремѣнно иное число очковъ, чѣмъ 12.

Число всѣхъ возможныхъ сочетаній при n бросаніяхъ костей есть 36^n, число же такихъ, изъ которыхъ сумму очковъ 12 необходимо исключить, будетъ, очевидно, 35^n. Слѣдовательно, число такихъ сочетаній, въ которыхъ 12 (Sonnez) можетъ заключаться одинъ или нѣсколько разъ, равно 36^n-35^n. Поэтому для искомой вѣроятности находимъ:

$$\frac{36^n-35^n}{36^n}=1-\left(\frac{35}{36}\right)^n.$$

Если пожелать, чтобы эта вѣроятность была равна $\frac{1}{2}$, то необходимо опредѣлить n изъ уравненія:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n=\frac{1}{2}$$

Это есть такъ называемое показательное уравненіе и рѣшеніе его съ помощью логариѳмовъ даетъ

$$n = \frac{\lg 2}{\lg 36 - \lg 35} = 24{,}605.$$

Отсюда видимъ, что если кто берется выбросить 12 очковъ въ 24 удара, то онъ имѣетъ болѣе шансовъ проиграть, чѣмъ выиграть. При 25 ударахъ получается обратное.

Изъ переписки Паскаля съ Ферма.

Вышеприведенная задача, какъ и задача 68-я этой книги, была предложена Паскалю также кавалеромъ де-Мере и также послужила толчкомъ для разработки первыхъ основъ теоріи вѣроятностей.

«У меня нѣтъ времени, писалъ по этому поводу Паскаль къ Ферма,—чтобы переслать вамъ разъясненіе одного затрудненія, которое очень удивляло г. де-Мере, потому что хотя онъ обладаетъ очень здравымъ умомъ, но онъ не геометръ. А это, какъ знаете, большой недостатокъ. Такъ, онъ сообщилъ мнѣ, что нашелъ противорѣчіе въ числахъ по слѣдующему поводу: Если браться выбросить 6 очковъ одной костью, то онъ имѣетъ шансы сдѣлать это въ 4 удара, но если взяться выкинуть 12 («Sonnez») съ помощью 2-хъ костей, то онъ не имѣетъ полныхъ шансовъ сдѣлать это въ 24 удара, а между тѣмъ отношеніе 24 къ 36, которое есть число всѣхъ граней, получаемыхъ изъ двухъ костей, равно отношенію 4 къ 6, числу граней одной кости.

«Такова приключившаяся съ нимъ большая непріятность, которая заставляетъ его презрительно утверждать, что математическія теоремы неустойчивы, и что ариѳметика противорѣчитъ сама себѣ»...

Отвѣтъ на сомнѣнія де-Мере не могъ затруднить ни Паскаля, ни Ферма.

Пока дѣло идетъ объ одной кости,—въ области небольшихъ чиселъ, разсужденія де-Мере правильны: при 4-хъ ударахъ онъ дѣйствительно имѣетъ шансы выкинуть одной костью на-

передъ заданное число очковъ (6). Но, какъ мы уже знаемъ, если увеличивается число костей и число ихъ выбрасываній, то число всевозможныхъ случаевъ, равно какъ и случаевъ, благопріятныхъ появленію событія, увеличивается, вообще, совсѣмъ не пропорціонально ни числу получаемыхъ сочетаній изъ граней костей, ни числу ихъ выбрасываній. Убѣдиться въ этомъ можно либо путемъ непосредственнаго опыта надъ простѣйшими случаями, либо путемъ вывода общей формулы. Кавалеръ де-Мере постигъ только первый путь. Паскаль хотѣлъ вывести его на второй, но тотчасъ увидѣлъ большой недостатокъ своего пріятеля: онъ не былъ, при всемъ своемъ умѣ, математикомъ...

Задача 74-я.

Въ чемъ дѣло?

Имѣются три шкатулки, совершенно одинаковыхъ по внѣшнему виду, въ каждой изъ нихъ по два ящичка, а въ каждомъ ящичкѣ по монетѣ. Въ одной шкатулкѣ только золотыя монеты, въ другой только серебряныя, а въ третьей—въ одномъ ящичкѣ золотая, а въ другомъ серебряная монета. Берутъ одну изъ шкатулокъ (все равно какую). Какова вѣроятность найти въ ней въ одномъ изъ ящиковъ золотую, а въ другомъ серебряную монету?

Можно подходить къ рѣшенію задачи двояко:

1. - Шкатулки тождественны. Значитъ равновозможны 3 случая. Благопріятствуетъ появленію событія одинъ. Слѣдовательно, искомая вѣроятность равна $\frac{1}{3}$.

2.— Взята наугадъ какая либо изъ шкатулокъ, и въ ней выдвинули одинъ ящикъ. Какова бы ни была найденная тамъ монета, но теперь оказываются возможными только два шанса (случая): во второмъ закрытомъ ящичкѣ шкатулки находится монета такого же металла, что и въ открытомъ, или другого. Изъ этихъ двухъ случаевъ одинъ благопріятный ожидаемому

нами событію, т. е., что у насъ въ рукахъ шкатулка съ разными монетами. Такимъ образомъ вѣроятность взять сразу въ руки требуемую шкатулку оказывается равной $\frac{1}{2}$.

Какъ же это такъ? Выходитъ, что достаточно въ одной изъ шкатулокъ только открыть ящикъ, чтобы вѣроятность изъ $\frac{1}{3}$ обратилась въ $\frac{1}{2}$.

Въ нашихъ разсужденіяхъ, очевидно, должна быть ошибка; и она дѣйствительно въ нихъ есть.

Когда мы открываемъ первый ящикъ въ шкатулкѣ, то остаются возможными два случая, и одинъ только благопріятствуетъ появленію ожидаемаго событія, -это вѣрно; но дѣло въ томъ, что два получающихся случая **неравновозможны.** Допустимъ, что, открывъ первый ящикъ, мы нашли тамъ золотую монету; въ другомъ, конечно, можетъ быть серебряная, но есть больше основаній утверждать, что въ этомъ закрытомъ ящикѣ находится тоже золотая монета.

Чтобы сдѣлать наше разсужденіе болѣе яснымъ, предположимъ, что у насъ не три, а триста совершенно одинаковыхъ съ двумя ящичками шкатулокъ. Сто изъ нихъ въ обоихъ ящичкахъ содержатъ по золотой монетѣ, сто—по серебряной, а въ третьей сотнѣ шкатулокъ--въ одномъ ящичкѣ находится одна золотая, а въ другомъ одна серебряная монета. Откроемъ по одному ящичку въ каждой изъ шкатулокъ, и мы увидимъ 300 медалей. Сто изъ нихъ должно быть золотыхъ и сто серебряныхъ, - это мы можемъ утверждать впередъ навѣрняка. Но относительно ста остальныхъ ничего напередъ сказать нельзя: онѣ находятся въ шкатулкахъ съ разными монетами, а какія и въ какомъ числѣ при выдвиганіи ящичковъ откроются монеты, зависитъ только отъ случая.

Открывъ триста ящичковъ, слѣдуетъ ожидать во всякомъ случаѣ, что увидимъ менѣе двухсотъ золотыхъ монетъ. Слѣдовательно, вѣроятность, что въ первой взятой наудачу шкатулкѣ другая монета (въ закрытомъ ящичкѣ), золотая, перевышаетъ $\frac{1}{2}$.

Настоящая задача можетъ служить примѣромъ того, какую осторожность и точность въ сужденіяхъ нужно соблюдать при опредѣленіи равновозможности случаевъ.

Необходимое замѣчаніе.

Во избѣжаніе неточностей и ошибокъ слѣдуетъ постоянно помнить, что *безконечность* не есть число. Поэтому нельзя вводить это понятіе въ разсужденія безъ соотвѣтствующихъ поясненій. Кажущаяся только точность иныхъ словъ можетъ также вести къ противорѣчіямъ. Выраженіе: «выбрать *наудачу* изъ безконечнаго числа возможныхъ случаевъ — не можетъ, напр., считаться достаточнымъ указаніемъ.

Вотъ еще примѣръ наудачнаго заданія, ведущаго къ противорѣчію:

Требуется опредѣлить вѣроятность того, что нѣкоторое число, цѣлое или дробное, соизмѣримое или несоизмѣримое, взятое *наудачу* между 0 и 100, будетъ болѣе 50-ти.

Отвѣтъ, повидимому, ясенъ: число случаевъ (статочностей), благопріятствующихъ появленію событія, равно половинѣ числа всѣхъ возможныхъ случаевъ. Искомая вѣроятность равна, слѣдовательно, $\frac{1}{2}$.

Но вмѣсто самаго числа, нисколько не мѣняя условій вопроса, можно взять его квадратъ. Если число заключается между 50 и 100, то его квадратъ заключается между 2 500 и 10 000. Вѣроятность, чтобы взятое *наудачу* между 0 и 10 000 число превышало 2 500, тоже представляется очевидной: число случаевъ, благопріятствующихъ появленію событія, равно тремъ четвертямъ всѣхъ равновозможныхъ случаевъ. Искомая вѣроятность, значитъ, равна $\frac{3}{4}$.

Обѣ задачи тождественны. Почему же получается такая разница въ отвѣтахъ? Потому, что въ самомъ заданіи нѣтъ надлежащей точности. Противорѣчій подобнаго рода можно подобрать сколько угодно и получать такимъ образомъ новые виды математическихъ софизмовъ.

Еще слѣдствіе изъ опредѣленія математической вѣроятности.

Припомнимъ опять принятое нами опредѣленіе математической вѣроятности и выведемъ изъ этого опредѣленія одно важное слѣдствіе. Положимъ, что при какомъ-нибудь опытѣ могутъ появиться нѣсколько событій. Пусть n, n', n'', ... будутъ числа случаевъ, благопріятныхъ соотвѣтственно каждому изъ нихъ, а m число всѣхъ возможныхъ случаевъ. Такъ какъ, по сдѣланному нами ограниченію, въ каждомъ случаѣ не могутъ появиться два или болѣе событія, то $m = n + n' + n'' + \ldots$ Вѣроятности каждаго событія выразятся дробями:

$$\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}, \frac{n''}{m}, \ldots$$

Но легко видѣть, что сумма этихъ дробей равна единицѣ. Отсюда слѣдуетъ, что **сумма вѣроятностей всѣхъ событій, могущихъ появиться при данномъ опытѣ, равна единицѣ.**

Задача 75-я.

Въ урнѣ заключается m бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ. Изъ этой урны вынимаемъ наудачу два шара. При этомъ опытѣ могутъ появиться три событія: 1) два бѣлыхъ, 2) бѣлый и черный, 3) два черныхъ шара. Какъ велика вѣроятность каждаго изъ этихъ событій?

Рѣшеніе.

Число возможныхъ случаевъ при нашемъ опытѣ равно числу сочетаній изъ $m + n$ шаровъ по два: $\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}$. Число случаевъ, благопріятныхъ появленію перваго событія, равно числу сочетаній изъ m бѣлыхъ шаровъ по два: $\frac{m(m-1)}{2}$. Случаи, благопріятные появленію второго событія, получаются комбинированіемъ каждаго бѣлаго съ каждымъ чернымъ ша-

ромъ; число этихъ случаевъ равно mn. Число случаевъ, благопріятныхъ появленію третьяго событія, равно числу сочетаній изъ n черныхъ шаровъ по два: $\frac{n(n-1)}{2}$. Раздѣливъ числа, благопріятныя появленію каждаго событія, на число всѣхъ возможныхъ случаевъ, получимъ искомыя вѣроятности:

$$\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}, \quad \frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}, \quad \frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$$

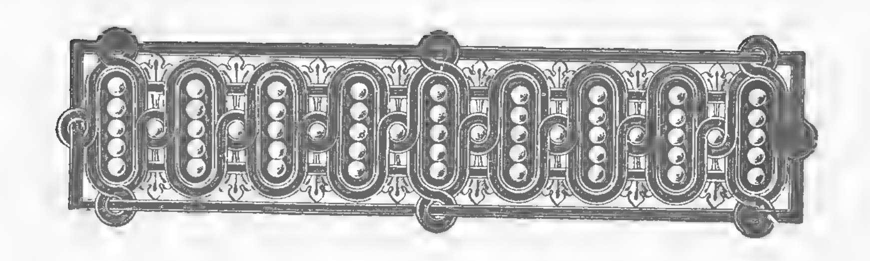
Сумма этихъ вѣроятностей, какъ и должно быть по нашей теоріи, равна единицѣ [1]).



[1]) Мы могли бы при нашемъ опытѣ разсматривать только два событія: появленіе бѣлаго или чернаго шара. При этомъ только нѣкоторые случаи благопріятны появленію обоихъ событій. Легко найти, что вѣроятности выхода бѣлаго и чернаго шара выражаются дробями:

$$\frac{m(m-1)+2mn}{(m+n)(m+n-1)}, \quad \frac{n(n-1)+2mn}{(m+n)(m+n-1)}.$$

Сумма этихъ вѣроятностей уже не равна единицѣ.



Вѣроятности сложныхъ событій.

Статья проф. В. П. Ермакова. «Журналъ элементарной математики» за 1884—85 г.

Появленіе нѣсколькихъ событій будемъ называть *сложнымъ событіемъ*.

Каждое изъ составныхъ событій въ свою очередь можетъ быть сложнымъ, т. е. можетъ состоять изъ нѣсколькихъ *простыхъ* событій.

Нѣсколько событій будемъ называть *независимыми*, если вѣроятность каждаго изъ нихъ не зависитъ отъ того, случились ли другія событія или нѣтъ.

Событія будемъ называть *зависимыми*, если появленіе или непоявленіе нѣкоторыхъ изъ нихъ оказываетъ вліяніе на вѣроятности появленія другихъ событій.

Покажемъ, прежде всего, какъ вычисляется вѣроятность сложнаго событія, состоящаго изъ нѣсколькихъ независимыхъ событій.

Положимъ, мы производимъ нѣсколько опытовъ, изъ которыхъ при первомъ можетъ появиться событіе A, при второмъ A', при третьемъ A'' и т. д. Означимъ чрезъ m число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, могущихъ появиться при первомъ

опытѣ, и чрезъ n число тѣхъ изъ этихъ случаевъ, которые благопріятны появленію событія A; соотвѣтственныя числа при второмъ, третьемъ и т. д. опытахъ означимъ чрезъ m' и n', m'' и n'' и т. д. Какъ велика вѣроятность, что появятся событія: A, A', A'' и т. д.?

Если мы производимъ опыты одновременно или одинъ за другимъ, то каждый случай при первомъ опытѣ можетъ комбинироваться съ каждымъ случаемъ при второмъ опытѣ, съ каждымъ случаемъ при третьемъ опытѣ и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что число всѣхъ возможныхъ случаевъ при нѣсколькихъ опытахъ равно произведенію нѣсколькихъ множителей, изъ которыхъ каждый выражаетъ число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ при каждомъ опытѣ въ отдѣльности. Итакъ, число всѣхъ случаевъ (какъ легко видѣть, равновозможныхъ) при нашихъ опытахъ равно $mm'm''$...



Профессоръ Василій Петровичъ Ермаковъ.

Такъ какъ каждый случай, благопріятный появленію событія A, можетъ комбинироваться съ каждымъ случаемъ, благопріятнымъ событію A', съ каждымъ случаемъ, благопріятнымъ A'', и т. д., то число всѣхъ случаевъ, благопріятныхъ сложному событію $AA'A''$..., равно произведенію $nn'n''$, нѣсколькихъ множителей, изъ которыхъ каждый выражаетъ число случаевъ, благопріятныхъ каждому событію въ отдѣльности.

Согласно опредѣленію вѣроятности (см. стр. 238 настоящей книги), вѣроятность сложнаго событія $AA'A''$... выразится дробью:

$$\frac{nn'n'' \dots}{mm'm'' \dots}$$

Но эта дробь можетъ быть разложена на произведеніе нѣсколькихъ дробей:

$$\frac{nn'n'' \ldots}{mm'm'' \ldots} = \frac{n}{m} \times \frac{n'}{m'} \times \frac{n'}{m''} \ldots$$

Легко видѣть, что дробные множители во второй части выражаютъ вѣроятности появленія каждаго изъ событій A, A', A'',... въ отдѣльности.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило:

Вѣроятность появленія нѣсколькихъ независимыхъ событій равна произведенію вѣроятностей этихъ событій.

Задача 76-я.

Имѣется нѣсколько урнъ съ шарами: въ первой m бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ, во второй m' бѣлыхъ и n' черныхъ, въ третьей m'' и n'' и т. д. Какъ велика вѣроятность, что, если вынуть по одному шару изъ каждо урны, всѣ появившіеся шары будутъ бѣлые?

Рѣшеніе.

Для рѣшенія этой задачи, согласно приведенному выше правилу, нужно вычислить вѣроятность выхода бѣлаго шара изъ каждой урны и полученныя вѣроятности перемножить. Такимъ образомъ, искомая вѣроятность получится равною произведенію:

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{m}{m'+n'} \times \frac{m''}{m''+n''} \ldots$$

Покажемъ теперь, какъ вычисляется вѣроятность появленія нѣсколькихъ зависимыхъ событій. Начнемъ съ рѣшенія частной задачи.

Задача 77-я.

Изъ урны, содержащей m бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ, вынимаемъ по одному шару и каждый разъ вынутый шаръ откладываемъ въ сторону. Какъ велика вѣроятность выхода подъ-рядъ двухъ бѣлыхъ шаровъ?

Рѣшеніе.

Задача эта, какъ и вообще многія задачи на вычисленіе вѣроятностей, можетъ быть рѣшена непосредственнымъ вычисленіемъ какъ числа всѣхъ возможныхъ случаевъ, такъ и числа случаевъ, благопріятныхъ ожидаемому событію. Но такое непосредственное опредѣленіе для многихъ задачъ бываетъ въ высшей степени затруднительно. Число всѣхъ возможныхъ случаевъ при выниманіи двухъ шаровъ изъ урны равно числу размѣщеній (если обращаемъ вниманіе на порядокъ, въ которомъ появляются шары) изъ всѣхъ $m+n$ шаровъ по два, т. е. равно $(m+n)\ (m+n-1)$. Число случаевъ, благопріятныхъ выходу два раза подъ-рядъ двухъ бѣлыхъ шаровъ, равно числу размѣщеній изъ m бѣлыхъ шаровъ по два, т. е. равно $(m-1)$. Слѣдовательно, вѣроятность выхода два раза подъ-рядъ двухъ бѣлыхъ шаровъ равна

$$\frac{m\ (m-1)}{(m+n)\ (m+n-1)}.$$

Эта задача рѣшается также другимъ пріемомъ, который можетъ быть примѣненъ къ рѣшенію многихъ болѣе сложныхъ задачъ. *Просимъ читателей сосредоточить все вниманіе на этомъ способѣ рѣшенія.*

Когда мы вынемъ одинъ шаръ (бѣлый или черный) изъ урны, то второй шаръ придется вынимать изъ урны, содержащей $m-1$ бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ, или изъ урны, содержащей m бѣлыхъ и $n-1$ черныхъ шаровъ. Въ первомъ случаѣ вѣроятность выхода бѣлаго шара за вторымъ разомъ равна $\frac{m-1}{m+n-1}$; во второмъ случаѣ вѣроятность того же событія равна $\frac{m}{m+n-1}$. Такимъ образомъ, условія, при которыхъ совершается второй опытъ (выходъ второго шара), измѣняются въ зависимости отъ появленія бѣлаго или чернаго шара при первомъ опытѣ; поэтому измѣняется также и вѣроятность второго событія (выходъ бѣлаго шара за вторымъ разомъ).

Изъ приведенныхъ разсужденій легко заключить, что наша задача тождественна слѣдующей.

Задача. Даны три урны съ шарами; въ первой m бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ, во второй $m-1$ бѣлыхъ и n черныхъ, въ третьей m бѣлыхъ и $n-1$ черныхъ шаровъ. Вынимаемъ одинъ шаръ изъ первой урны и одинъ шаръ или изъ второй, или изъ третьей урны. При этомъ второй шаръ вынимаемъ изъ второй урны только въ томъ случаѣ, если изъ первой урны появится бѣлый шаръ; въ случаѣ же выхода чернаго шара изъ первой урны, второй шаръ вынимаемъ изъ третьей урны. Какъ велика вѣроятность, что при соблюденіи сказанныхъ условій появятся два бѣлыхъ шара?

Если мы желаемъ вычислить появленіе двухъ бѣлыхъ шаровъ, то на третью урну мы можемъ не обращать вниманія (ее отбросить), такъ какъ, сообразно условіямъ задачи, съ этой урной мы имѣемъ дѣло только тогда, когда изъ первой урны появляется черный шаръ. Отсюда заключаемъ, что послѣдняя задача равносильна слѣдующей.

Задача 78-я.

Изъ двухъ урнъ, содержащихъ первая m бѣлыхъ и n черныхъ, вторая $m-1$ бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ, вынимаемъ по одному шару. Какъ велика вѣроятность появленія двухъ бѣлыхъ шаровъ?

Рѣшеніе.

При рѣшеніи этой послѣдней задачи мы имѣемъ дѣло съ независимыми событіями; поэтому искомая вѣроятность сложнаго событія равна произведенію вѣроятностей простыхъ событій:

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{m-1}{m+n-1}.$$

Разсмотрѣнная нами задача можетъ быть обобщена слѣдующимъ образомъ.

Задача 79-я.

Предстоитъ произвесть одинъ за другимъ два опыта,—назовемъ ихъ чрезъ P и Q; при первомъ опытѣ можетъ появиться событіе A, при второмъ B. При первомъ опытѣ число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ m, изъ которыхъ n благопріятны появленію событія A. Условія второго опыта мѣняются въ зависимости отъ появленія или непоявленія событія A: если событіе A появилось, то при второмъ опытѣ число всѣхъ возможныхъ случаевъ равно m', а число случаевъ, благопріятныхъ событію B, равно n'; если же событіе A не появилось, то при второмъ опытѣ всѣхъ возможныхъ случаевъ будетъ m'', изъ которыхъ n'' благопріятны событію B. Какъ велика вѣроятность появленія двухъ событій A и B?

Рѣшеніе.

Вѣроятность перваго событія A равна $\frac{n}{m}$. Что касается вѣроятности второго событія B, то она равна $\frac{n'}{m'}$, если первое событіе появилось, или $\frac{n''}{m''}$, если событіе A не появилось.

Подобно тому какъ и въ прежней задачѣ, мы можемъ опытъ Q замѣнить двумя самостоятельными опытами R и S, при каждомъ изъ которыхъ можетъ появиться событіе B. При опытѣ R число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ равно m', а число случаевъ, благопріятныхъ событію B, равно n'; при опытѣ S соотвѣтственныя числа равны m'' и n''.

Опытъ P мы производимъ обязательно. Что касается остальныхъ двухъ опытовъ R и S, то изъ нихъ мы производимъ только одинъ, а именно—опытъ R, если событіе A появилось, въ противномъ случаѣ—опытъ S.

Но если мы желаемъ опредѣлить вѣроятность появленія двухъ событій, то на опытъ S мы можемъ не обращать вни-

манія, какъ бы его и вовсе не было, такъ какъ, по условію задачи, съ этимъ опытомъ мы только тогда имѣемъ дѣло, когда событіе A не появляется.

Итакъ, задача наша приводится къ опредѣленію вѣроятности появленія двухъ событій A и B при двухъ независимыхъ опытахъ P и R. Но въ такомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ двумя несависимыми событіями, и вѣроятность появленія такихъ событій, согласно данному раньше правилу, равна произведенію:

$$\frac{n}{m} \times \frac{n'}{m'}.$$

Это и будетъ отвѣтъ на нашу 79-ю задачу. Разсматривая полученный результатъ, мы замѣтимъ, что первый множитель $\frac{n}{m}$ есть вѣроятность перваго событія; второй множитель $\frac{n'}{m'}$ есть вѣроятность второго событія, вычисленнаго въ томъ предположеніи, что первое событіе A уже случилось. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему правилу:

Вѣроятность появленія двухъ зависимыхъ событій равна произведенію вѣроятности перваго событія на вѣроятность второго событія, вычисленную въ томъ предположеніи, что первое событіе уже случилось.

Пояснимъ это правило примѣромъ

Задача 80-я.

Даны двѣ урны съ шарами; въ одной n бѣлыхъ и $m-n$ черныхъ, въ другой n' бѣлыхъ и $m'-n'$ черныхъ шаровъ. Вынимаемъ одинъ шаръ изъ первой урны, остальные же шары пересыпаемъ во вторую урну; послѣ этого, перемѣшавши шары, вынимаемъ одинъ шаръ изъ второй урны. Какъ велика вѣроятность появленія два раза подъ-рядъ двухъ бѣлыхъ шаровъ?

Вѣроятность перваго событія, выхода бѣлаго шара изъ первой урны, равна $\frac{n}{m}$. Предполагая, что первое событіе случилось

и, какъ сказано въ задачѣ, остальные шары всыпаны во вторую урну, въ этой послѣдней будемъ имѣть всѣхъ $m+m'-1$ шаровъ, въ томъ числѣ $n+n'-1$ бѣлыхъ; вѣроятность выхода бѣлаго шара изъ такой урны равна $\frac{n+n'-1}{m+m'-1}$. Искомая вѣроятность сложнаго событія равна произведенію:

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{n+n'-1}{m+m'-1}.$$

Наше послѣднее правило можетъ быть обобщено на нѣсколько событій. Положимъ, намъ нужно вычислить вѣроятность появленія трехъ зависимыхъ событій: A, B и C. Если мы появленіе двухъ первыхъ событій A и B примемъ за одно (сложное) событіе и назовемъ его чрезъ D, то вопросъ приводится къ опредѣленію вѣроятности появленія двухъ зависимыхъ событій D и C. Эта вѣроятность равна произведенію двухъ множителей: $s \times r$, изъ которыхъ первый есть вѣроятность перваго событія D, а второй — вѣроятность второго событія C, вычисленная въ томъ предположеніи, что событіе D уже случилось. Въ свою очередь вѣроятность событія D, какъ вѣроятность сложнаго событія, состоящаго изъ двухъ зависимыхъ событій A и B, разлагается на произведеніе двухъ множителей, $s=p \times q$; первый изъ этихъ множителей есть вѣроятность событія A, второй—вѣроятность событія B, вычисленная въ томъ предположеніи, что событіе A уже появилось. Итакъ, вѣроятность появленія трехъ зависимыхъ событій равна

$$s \times r = p \times q \times r.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее общее правило:

Вѣроятность появленія нѣсколькихъ зависимыхъ событій равна произведенію нѣсколькихъ множителей, изъ которыхъ первый есть вѣроятность перваго событія, а каждый слѣдующій множитель выражаетъ вѣроятность слѣдующаго событія, вычисленную въ томъ предположеніи, что предъидущія событія уже появились.

Приложимъ это правило къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ.

Задача 81-я.

Изъ полной колоды картъ вынимаемъ три карты. Какъ велика вѣроятность, что всѣ вынутыя карты будутъ фигуры?

Рѣшеніе.

Въ полной колодѣ 40 простыхъ картъ и 12 фигуръ. Результатъ будетъ одинъ и тотъ же, вынимаемъ ли мы три карты разомъ, или одну за другою. Предположимъ, что мы вынимаемъ одну карту за другою и каждый разъ вынутую карту откладываемъ въ сторону; въ такомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ тремя зависимыми событіями. Вѣроятность выхода фигуры за первымъ разомъ равна $^{12}/_{52}$. Предположимъ, что одна фигура уже вынута: вѣроятность выхода второй фигуры равна $^{11}/_{51}$. Если мы предположимъ, что вынуты двѣ фигуры, то вѣроятность выхода третьей фигуры равна $^{10}/_{50}$. Искомая вѣроятность появленія трехъ фигуръ получится перемноженіемъ найденныхъ вѣроятностей:

$$\frac{12}{52}\times\frac{11}{51}\times\frac{10}{50}=\frac{11}{1105}.$$

Задача 82-я.

Изъ урны, содержащей a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ, вынимаемъ по одному шару (каждый разъ вынутый шаръ откладываемъ въ сторону) до тѣхъ поръ, пока появится бѣлый шаръ. Какъ велика вѣроятность, что бѣлый шаръ появится за n-ымъ разомъ?

Рѣшеніе.

Мы ищемъ вѣроятность выхода $n-1$ черныхъ шаровъ и одного бѣлаго шара. Здѣсь мы имѣемъ дѣло съ n зависимыми событіями. Вѣроятность выхода чернаго шара за первымъ разомъ равна $\frac{b}{a+b}$. Предположимъ, что черный шаръ появился за первымъ разомъ: вѣроятность выхода чернаго шара за вто-

рымъ разомъ равна $\frac{b-1}{a+b-1}$. Точно также вѣроятность выхода чернаго шара за третьимъ разомъ равна $\frac{b-2}{a+b-2}$ и т. д. Вѣроятность выхода чернаго шара за $n-1$ разомъ, предполагая, что прежде появившіеся шары—черные, равна $\frac{b-n+2}{a+b-n+2}$. Если предположить, что вынуты $n-1$ черныхъ шаровъ, вѣроятность выхода бѣлаго шара за n-мъ разомъ равна $\frac{a}{a+b-n+1}$. Искомая вѣроятность сложнаго событія получится перемноженіемъ найденныхъ вѣроятностей:

$$\frac{b\ (b-1)\ (b-2)\ .\ .\ .\ (b-n+2)\ a}{(a+b)\ (a+b-1)\ (a+b-2)\ .\ .\ .\ (a+b-n+1)}.$$

Подъ эту общую формулу не подходитъ только вѣроятность выхода бѣлаго шара за первымъ разомъ (такъ какъ здѣсь идетъ рѣчь о простомъ событіи), которая равна $\frac{a}{a+b}$. Въ частномъ случаѣ вѣроятности выхода бѣлаго шара за вторымъ, за третьимъ и т. д. разомъ выражаются дробями:

$$\frac{ba}{(a+b)(a+b-1)},\ \frac{b\ (b-1)\ a}{(a+b)\ (a+b-1)(a+b-2)},\ .\ .$$

Изъ послѣдней задачи можно вывести одно интересное слѣдствіе. При нашемъ опытѣ бѣлый шаръ можетъ появиться или за первымъ, или за вторымъ, или за третьимъ разомъ и т. д.; другихъ событій не можетъ быть, такъ какъ бѣлый шаръ долженъ непремѣнно появиться. На страницѣ 253 настоящей книги было показано, что сумма вѣроятностей всѣхъ событій, могущихъ появиться при какомъ-нибудь опытѣ, равна единицѣ. Примѣнимъ это правило къ нашему опыту. Сложивъ вѣроятности выхода бѣлаго шара за первымъ, вторымъ, третьимъ и т. д. разомъ, мы должны получить въ суммѣ единицу:

$$1 = \frac{a}{a+b} + \frac{ba}{(a+b)\ (a+b-1)} +$$
$$+ \frac{b(b-1)a}{(a+b)\ (a+b-1)\ (a+b-2)} + .\ .\ .$$

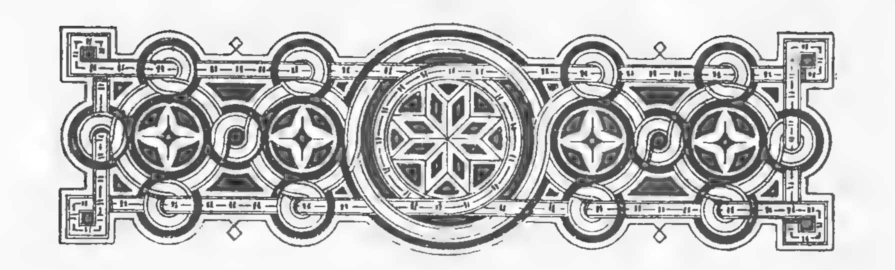
Раздѣливъ обѣ части на a, получимъ слѣдующее тождество:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+b}+\frac{b}{(a+b)(a+b-1)}+$$
$$+\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)+}+..$$

Легко повѣрить это тождество на частныхъ примѣрахъ; можно дать также независимое доказательство (и обобщить на тотъ случай, когда a и b не суть цѣлыя числа), что мы предоставляемъ самимъ читателямъ.

Примѣчаніе. Легко видѣть, что послѣднее общее правило одинаково приложимо къ вычисленію вѣроятности появленія какъ зависимыхъ, такъ и независимыхъ событій; поэтому имъ можно пользоваться во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда имѣемъ дѣло съ вычисленіемъ вѣроятности сложнаго событія.





Математическое ожиданіе.

Вопросъ объ *участи*, ожидающей игроковъ при тѣхъ или иныхъ условіяхъ игры, и связанные съ этимъ вопросы о такъ называемой *безобидности* игры были первыми, которыми занимались творцы теоріи вѣроятностей. При разработкѣ этихъ вопросовъ пришлось тотчасъ внести новое понятіе, опредѣляемое словами *математическое ожиданіе*.

Математическое ожиданіе того, кто имѣетъ вѣроятность p получить сумму s, измѣряется произведеніемъ $p \cdot s$.

Если эта ожидаемая сумма заранѣе извѣстна, то опредѣленіе математическаго ожиданія сводится, въ сущности, къ отысканію вѣроятности. Не то бываетъ, когда условія игры, или предпріятія, допускаютъ возможность какъ выигрыша, такъ и проигрыша нѣсколькихъ различныхъ суммъ, смотря по тѣмъ или инымъ случайнымъ обстоятельствомъ. Если же событія, вѣроятности которыхъ соотвѣтственно суть $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, даютъ право на осуществленіе различныхъ суммъ соотвѣтственныхъ прибылей или убытковъ s_1, s_2, $s_3, \ldots s_n$, то математическое ожиданіе опредѣляется, какъ сумма произведеній

$$p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + \ldots + p_n s_n .$$

Отсюда видно, что математическое ожиданіе дѣлается извѣстнымъ, если вычислить всѣ различные возможные случаи. Но иногда удобнѣе искать его непосредственно, не вычисляя всѣхъ составляющихъ его членовъ.

Для примѣра рѣшимъ задачу о математическомъ ожиданіи выигрыша для владѣльца одного билета благотворительной (въ пользу голодающихъ) правительственной лотереи, устроенной въ 1891 году.

Задача 83-я.

Математическое ожиданіе выигрыша въ лотерею.

Выпущено 1 200 000 билетовъ съ 2 928 выигрышами, размѣры которыхъ опредѣлены слѣдующимъ образомъ:

1	выигрышъ	въ	100 000	руб.;
1	»	»	50 000	»
1	»	»	25 000	»
10	выигрышей	»	10 000	»
15	»	»	5 000	»
100	»	»	1 000	»
200	»	»	500	»
2600	»	»	250	»

Опредѣлить математическое ожиданіе выигрыша для владѣльца одного билета.

Рѣшеніе.

Величина выигрыша владѣльца одного билета разсматриваемой лотереи могла имѣть значенія 100 000 р., 50 000 р., 25 000 р., 10 000 р., 5 000 р., 1 000 р., 500 р., 250 р. и 0, а вѣроятность событій, при коихъ величина выигрыша получала указанныя значенія, на основаніи приведеннаго выше распредѣленія выигрышныхъ суммъ, опредѣлится слѣдующими дробями:

$$\frac{1}{1\,200\,000},\ \frac{1}{1\,200\,000},\ \frac{1}{1\,200\,000},\ \frac{10}{1\,200\,000},$$

$$\frac{15}{1\,200\,000},\ \frac{100}{1\,200\,000},\ \frac{200}{1\,200\,000},\ \frac{2\,600}{1\,200\,000},$$

$$\frac{1\,200\,000-2\,928}{1\,200\,000}=\frac{1\,197\,072}{1\,200\,000}.$$

Умножая каждую вѣроятность на сотвѣтствующую сумму и складывая все, найдемъ, что математическое ожиданіе выигрыша было, слѣдовательно, равно

$$\frac{100\,000}{1\,200\,000}+\frac{50\,000}{1\,200\,000}+\frac{25\,000}{1\,200\,000}+\frac{10\cdot 10\,000}{1\,200\,000}+$$

$$+\frac{15\cdot 5\,000}{1\,200\,000}+\frac{100\cdot 1\,000}{1\,200\,000}+\frac{200\cdot 500}{1\,200\,000}+\frac{250\cdot 2\,600}{1\,200\,000}+$$

$$+0.\ \frac{1\,197\,072}{1\,200\,000}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{12}+$$

$$+\frac{1}{12}+\frac{13}{24}=1.$$

Условіе безобидности игръ.

Возьмемъ какую-либо игру, состоящую изъ ряда партій, изъ которыхъ каждая кончается выигрышемъ или проигрышемъ одного изъ двухъ игроковъ.

Предположимъ, для общности разсужденія, что математическое ожиданіе выигрыша или проигрыша для игрока измѣняется отъ одной партіи къ другой. Допустимъ также при этомъ, что математическое ожиданіе выигрыша (или проигрыша) не можетъ быть величиной безконечно малой, т.-е. оно остается все время не меньше нѣкоторой конечной величины, отличной отъ нуля. Съ другой стороны, допустимъ, что математическое ожиданіе квадрата выигрыша не можетъ быть безконечно большимъ. При этихъ условіяхъ можно доказать, что

Если математическое ожиданіе выигрыша для одного изъ игроковъ есть величина положительная, то съ вѣроятностью, сколько угодно близкой къ достовѣрности, можно разсчитывать, что при достаточно большомъ числѣ партій выигрышъ его превзойдетъ всякую напередъ заданную величину.

На этой теоремѣ, доказательство которой читатель можетъ найти въ соотвѣтствующихъ курсахъ (см., напр., С. К. Савичъ «Элементарная теорія страхованія» и др.), основывается понятіе о безобидности игръ. Пусть два лица A и B предприняли нѣкоторую игру, состоящую изъ ряда отдѣльныхъ партій, изъ которыхъ каждая кончается выигрышемъ или проигрышемъ одного изъ нихъ. Составимъ математическое ожиданіе выигрыша игрока A. Если эта величина окажется положительной, то на основаніи предшествующей теоремы можно съ вѣроятностью, какъ угодно близкой къ достовѣрности (къ единицѣ), разсчитывать, что при достаточно большомъ числѣ партій выигрышъ A превзойдетъ всякую величину, напередъ заданную.

Если, наоборотъ, математическое ожиданіе выигрыша для игрока A окажется отрицательнымъ, то математическое ожиданіе выигрыша для игрока B будетъ положительно, и при достаточно большомъ числѣ партій можно съ достовѣрностью разсчитывать, что выигрышъ B будетъ столь великъ, сколь угодно. На этомъ основаніи *безобидными играми называются такія игры, въ которыхъ математическое ожиданіе выигрыша для каждаго игрока есть нуль.*

Понятіе о безобидности примѣняется не только къ собственно азартнымъ играмъ, но и вообще ко всякаго рода операціямъ, гдѣ уплата различныхъ суммъ или полученіе ихъ обусловлены наступленіемъ нѣкоторыхъ событій случайнаго характера; такъ, напр., понятіе о безобидности игръ примѣняется къ страховымъ операціямъ, гдѣ уплаты обѣихъ сторонъ—страховщика и страхователя—обусловлены наступленіемъ различныхъ событій, связанныхъ съ жизнью человѣка.

Задача 84-я.

Въ мѣшкѣ находится 10 бѣлыхъ и 15 черныхъ шаровъ. Опредѣлить вѣроятность, что, взявъ заразъ оттуда 5 шаровъ, мы вытащимъ 2 бѣлыхъ и 3 черныхъ.

Рѣшеніе.

Всего въ мѣшкѣ 25 шаровъ. Если берется сразу 5 шаровъ, то число *всѣхъ* равновозможныхъ и несомнѣнныхъ случаевъ равно, очевидно, числу сочетаній изъ 25 элементовъ по 5, т. е.

$$C_{25}^{5}=\frac{25\,.\,24\,.\,23\,.\,22\,.\,21}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,.$$

Число всѣхъ равновозможныхъ и несовмѣстимыхъ случаевъ, благопріятствующихъ появленію 2-хъ бѣлыхъ шаровъ, есть

$$C_{10}^{2}=\frac{10\,.\,9}{1\,.\,2}\,,$$

а число такихъ же случаевъ, благопріятныхъ появленію 3-хъ черныхъ, есть

$$C_{15}^{3}=\frac{15\,.\,14\,.\,13}{1\,.\,2\,.\,3}\,.$$

Эти послѣдніе могутъ комбинироваться каждое съ каждымъ, т. е. числителемъ дроби, выражающей искомую вѣроятность ожидаемаго событія, надо взять произведеніе $C_{10}^{2}\cdot C_{15}^{3}$. Знаменателемъ же искомой дроби будетъ C_{25}^{5}. Итакъ, для искомой вѣроятности имѣемъ

$$\frac{C_{10}^{2}\cdot C_{15}^{3}}{C_{25}^{5}}=\frac{\dfrac{10\,.\,9\,.\,15\,.\,14\,.\,13}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2\,.\,3}}{\dfrac{25\,.\,24\,.\,23\,.\,22\,.\,21}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}}$$

$$=\frac{10\,.\,9\,.\,15\,.\,14\,.\,13\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,25\,.\,24\,.\,23\,.\,22\,.\,21}=\frac{195}{506}.$$

Общій случай. *Вообще, если въ мѣшкѣ находится* **p** *бѣлыхъ и* **q** *черныхъ шаровъ, то вѣроятность вытянуть за одинъ разъ* **a** *бѣлыхъ и* **b** *черныхъ шаровъ равна дроби*

$$\frac{C_{p}^{a}\,C_{q}^{b}}{C_{p+q}^{a+b}}\,.$$

Задача 85-я.

Генуэзская лотерея.

Эта лотерея, до сихъ поръ процвѣтающая въ Италіи, въ прежнее время имѣла также обширное распространеніе во Франціи и во многихъ областяхъ Германіи. Она состоитъ изъ 90 нумеровъ, и при каждомъ ея розыгрышѣ выходитъ по 5 нумеровъ. По условію лотереи, можно ставить ту или иную сумму на любой изъ 90 нумеровъ, или на любую совокупность двухъ, трехъ, четырехъ и наконецъ 5-ти нумеровъ, что соотвѣтственно называется: *простая одиночка*, *амбо*, *тернъ*, *кватернъ* и *квинъ*.

Если въ числѣ вышедшихъ нумеровъ находится совокупность тѣхъ, на которые игрокъ ставилъ сумму, то администрація лотереи выдавала этому игроку условленную сумму, находящуюся въ опредѣленномъ отношеніи къ величинѣ ставки. Это отношеніе равно:

для простой одиночки	15
» амбо	270
» терна	5 500
» кватерна	75 000
» квина	1 000 000

Послѣ этихъ предварительныхъ поясненій задачу о Генуэзской лотереѣ мы можемъ формулировать такъ:

Въ сосудѣ содержится 90 билетовъ съ нумерами 1, 2, 3, 4, ..., 89, 90. Вынимаютъ сразу или послѣдовательно 5 билетовъ, при чемъ, въ случаѣ послѣдовательнаго изъятія, ни одинъ изъ вынутыхъ билетовъ не возвращаютъ обратно въ сосудъ и новыхъ туда также не подкладываютъ. Опредѣлить вѣроятность выигрыша на заранѣе выбранныя: простую одиночку, на амбо, тернъ, кватернъ и, наконецъ, на квинъ.

Рѣшеніе.

Читатель, рѣшившій общій случай предыдущей задачи, тотчасъ сообразитъ, что настоящая задача есть частный случай ея.

Число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ въ задачѣ равно, очевидно, числу сочетаній изъ 90 элементовъ по пяти, т. е.

$$C_{90}^{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Теперь остается только опредѣлить число случаевъ, благопріятныхъ соотвѣтственно появленію напередъ указанныхъ простыхъ одиночекъ или амбо, или терна, или квартерна, или квина.

1) Для случая простой напередъ взятой одиночки задача сводится къ такой: въ сосудѣ находится 1 бѣлый и 89 черныхъ шаровъ. Вытаскивается сразу 5 шаровъ. Какова вѣроятность, что при этомъ окажется одинъ бѣлый и 4 черныхъ шара? Число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, какъ знаемъ, равно C_{90}^{5}. Число такихъ же случаевъ, благопріятныхъ появленію 1 бѣлаго и 4 черныхъ шаровъ, будетъ, по предыдущей задачѣ, $C_{89}^{4} \cdot C_{1}^{1}$, или просто C_{89}^{4}, такъ какъ $C_{1}^{1} = 1$.

2) Для амбо наша задача обращается въ такую: въ сосудѣ 2 бѣлыхъ и 88 черныхъ шаровъ; опредѣлить вѣроятность, что, взявъ сразу 5 шаровъ, мы вытянемъ эти 2 бѣлыхъ шара и 3 черныхъ.

Число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ есть C_{90}^{5}. Число же благопріятныхъ появленію событія равновозможныхъ случаевъ есть, по предыдущему, $C_{88}^{3} \cdot C_{2}^{2}$, или просто C_{88}^{3}, такъ какъ $C_{2}^{2} = 1$. Итакъ, вѣроятность полученія напередъ взятаго амбо выражается дробью

$$\frac{C_{88}^{3}}{C_{90}^{5}}.$$

Подобнымъ же образомъ для математической вѣроятности тернъ, кватернъ и квинъ найдемъ соотвѣтственно дроби:

$$\frac{C_{87}^{2}}{C_{90}^{5}}, \quad \frac{C_{86}^{1}}{C_{90}^{5}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{C_{90}^{5}}.$$

Вычисляя на самомъ дѣлѣ, получаемъ, что вѣроятность появленія напередъ взятой простой одиночки ровна:

$$\frac{C_{89}^{4}}{C_{90}^{5}}=\frac{89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{18};$$

амбо:

$$\frac{C_{88}^{3}}{C_{90}^{5}}=\frac{88\cdot 87\cdot 86\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{2}{801};$$

тернъ:

$$\frac{C_{87}^{2}}{C_{90}^{5}}=\frac{87\cdot 86\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{11\,748};$$

кватернъ:

$$\frac{C_{86}^{1}}{C_{90}^{5}}=\frac{86\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{511\,038};$$

квинъ:

$$\frac{1}{C_{90}^{5}}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}=\frac{1}{43\,949\,268}.$$

Допустимъ далѣе, что ставка игрока въ эту лотерею равна M; тогда математическое ожиданіе его прибыли отъ участія въ лотереѣ соотвѣтственно выражается числами (см. выше: условія лотереи и выдача администраціи):

въ случаѣ простой одиночки . . . . $\left(\frac{15}{18}-1\right)M=-\frac{1}{6}M$

» » амбо . . . . $\left(\frac{270\cdot 2}{801}-1\right)M=-\frac{29}{89}M$

» » терна . . . . $\left(\frac{5\,500}{11\,748}-1\right)M=-\frac{1\,562}{2\,937}M$

и т. д.

Математическое ожиданіе выражается отрицательнымъ числомъ. Значитъ, эта лотерея представляетъ не безобидную для публики игру. Она приноситъ пользу только ея устроителямъ.

Рулетка въ Монте-Карло [1]).

Хорошій примѣръ, поясняющій изложенныя выше соображенія о математической безобидности игръ, даетъ анализъ азартной игры, называемой *рулеткой.*

Запрещенная для производства въ общественныхъ мѣстахъ почти во всѣхъ государствахъ, эта азартная игра пріютилась въ маленькомъ государствѣ, княжествѣ Монако, расположенномъ въ красивой мѣстности на югѣ Франціи, на берегу Средиземнаго моря.

На высокой горѣ Monte Carlo (Монтекарло), спускающейся обрывомъ къ морю, среди садовъ субтропической растительности находится дворецъ, такъ называемое «казино», въ которомъ происходитъ азартная игра.

Этотъ роскошный игорный притонъ принадлежитъ акціонерной компаніи, платящей громадную милліонную аренду князю Монако.

Въ громадныхъ, богатоукрашенныхъ залахъ казино на большихъ столахъ, расположенныхъ на значительномъ разстояніи другъ отъ друга, производятся съ утра до ночи, цѣлый годъ безъ перерыва, двѣ азартныя игры: *рулетка* и *trente-et-quarante* (тридцать и сорокъ). Болѣе 20 столовъ предназначено для рулетки и столько же для trente-et-quarante.

Около каждаго стола толпится большое число играющихъ. Рулетка игра болѣе дешевая, такъ какъ наименьшую ставку составляетъ большая серебряная пятифранковая монета. Позволяется ставить только суммы, кратныя пяти франкамъ. Наименьшей ставкой игры trente-et-quarante является уже золотая монета въ 20 франковъ.

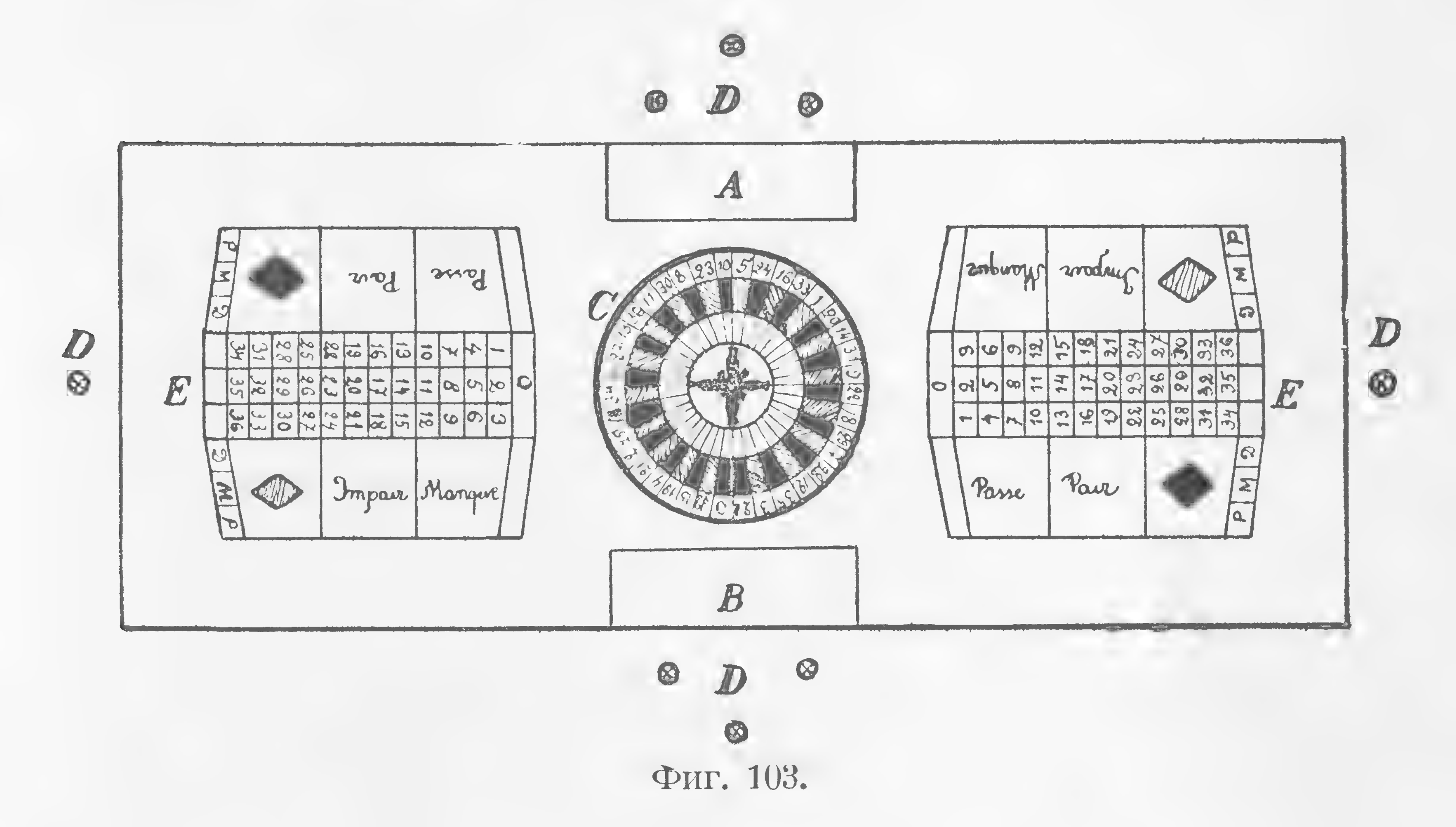
Мы ограничимся лишь анализомъ игры рулетки. На срединѣ стола (фиг. 103) находится такъ называемая рулетка (*C*). Эта рулетка представляетъ собою большую круглую неглубокую деревянную чашку, на днѣ которой вращается горизонтальный кругъ C, раздѣленный радіусами на 37 секто-

[1]) Изъ книги проф. Д. Граве *«Энциклопедія Математики»*. Кіевъ. 1912 г.

ровъ; секторы окрашены попеременно въ черный и красный (на нашемъ чертежѣ заштриховано) цвѣта. По краямъ круга размѣщены въ нѣкоторомъ, весьма тонко обдуманномъ, безпорядкѣ всѣ числа отъ 0 до 36, такъ что каждому сектору соотвѣтствуетъ одно число.

Около каждаго стола находится восемь служащихъ при рулеткѣ, такъ называемыхъ *croupier*; мѣста, которыя они занимаютъ около стола, обозначены буквой D на чертежѣ.

По обѣимъ сторонамъ стола открываются ящики A и B, представляющіе кассу банка. Каждый день утромъ въ каждый столъ вкладывается 200 000 франковъ.



Фиг. 103.

Для ставокъ играющихъ на зеленомъ суконѣ, покрывающемъ столъ, нарисованы желтой краской фигуры E вида, указаннаго на чертежѣ.

Въ началѣ каждой игры одинъ изъ крупье, выкрикнувъ: «Messieus, faites vos jeux» (господа, дѣлайте ваши ставки) приводитъ горизонтальный кругъ съ секторами во вращеніе и въ тотъ же моментъ въ противоположномъ направленіи бросаетъ въ чашку маленькій шарикъ слоновой кости. Скоро кругъ и шарикъ останавливаются въ своемъ движеніи, при чемъ шарикъ оказывается попавшимъ на одно изъ чиселъ, расположенныхъ по краю круга. Это число считается выигравшимъ, т. е. тотъ,

кто поставилъ свою монету на это число, выигрываетъ. Ставки, поставленныя на остальныя числа, банкъ беретъ себѣ, какъ проигранныя.

Если не считать нуля (zero), то половина всѣхъ 36 нумеровъ соотвѣтствуетъ «*чернымъ*» (noir) секторамъ, половина же «*краснымъ*» (rouge); половина нумеровъ состоитъ изъ «*четныхъ*» (pair) чиселъ, половина изъ «*нечетныхъ*» (impair); половина изъ «*нижнихъ*» (manque) нумеровъ, т. е. отъ 1 до 18, половина изъ «*верхнихъ*» (passe), т. е. отъ 19 до 36.

Поэтому, если выигрываетъ, напримѣръ, нумеръ 34, то крупье выкрикиваетъ такъ: «34, rouge, paire et passe».

Можно ставить монету на одинъ только нумеръ; можно ставить на нѣсколько сосѣднихъ нумеровъ: на два, три, четыре и шесть.

Ставка на группу нумеровъ обозначаетъ, что ставящій получаетъ выигрышъ при паденіи шарика на *одно* изъ чиселъ этой группы.

Очевидно, что чѣмъ на большее число нумеровъ монета поставлена, тѣмъ вѣроятность выигрыша больше.

Такъ, напримѣръ, на краю фигуры существуютъ клѣтки, обозначенныя

$$P_{12}, M_{12}, D_{12};$$

P_{12} обозначаетъ *première douzaine*» (первая дюжина), т. е. числа отъ 1 до 12; M_{12} обозначаетъ «*douze milieu*» (средняя дюжина), отъ 13 до 24; D_{12} обозначаетъ «*dernière douzaine*» (послѣдняя дюжина), отъ 25 до 36.

Подъ каждой изъ вертикальныхъ колоннъ нумеровъ находятся пустыя клѣтки, соотвѣтствующія числамъ этой колонны.

Самая большая вѣроятность выигрыша соотвѣтствуетъ такъ называемымъ «*chances simples*» (простымъ шансамъ), когда монета ставится на 18 нумеровъ. Тутъ возможны шесть комбинацій: 1) черный, 2) красный, 3) четъ, 4) нечетъ, 5) passe, 6) manque.

Для этихъ комбинацій имѣются по бокамъ большія клѣтки, ибо публика болѣе охотно ставитъ на эти комбинаціи вслѣдствіе наибольшей вѣроятности выигрыша.

Правила игры таковы, что въ случаѣ выигрыша кромѣ ставки, поставленной игрокомъ на извѣстную комбинацію, банкъ приплачиваетъ этому игроку отъ себя, какъ выигрышъ, нѣкоторую кратность ставки по слѣдующей таблицѣ.

Число нумеровъ, на которые поставлена ставка a:	Выигрышъ:
1	$35\,a$
2	$17\,a$
3	$11\,a$
4	$8\,a$
6	$5\,a$
12	$2\,a$
18	a

Легко убѣдиться, что такой расчетъ выигрышей дѣлаетъ рулетку игрой *обидной въ пользу банка и противъ всѣхъ остальныхъ игроковъ.*

Если бы не было нумера «*нуль*», то игра при вышеприведенномъ расчетѣ выигрышей была бы безобидна.

Примемъ ставку за единицу и вычислимъ математическое ожиданіе выгоды банка на каждой ставкѣ игрока. Пусть ставка поставлена на одинъ нумеръ, напримѣръ 31; очевидно, что банкъ выигрываетъ 1, когда выходитъ одинъ изъ 36 нумеровъ, 0, 1, 2, ... 30, 32, ... 36, вѣроятность чего будетъ $\frac{36}{37}$. Значитъ, математическое ожиданіе выигрыша банка будетъ $1 \cdot \frac{36}{37} = \frac{36}{37}$. Банкъ проигрываетъ 35 при выходѣ нумера 31, вѣроятность чего есть $\frac{1}{37}$; значитъ математическое ожиданіе проигрыша будетъ $\frac{35}{37}$. Получится въ общемъ $\frac{36}{37} - \frac{35}{37} = \frac{1}{37}$, т. е. *положительное* математическое ожиданіе.

Ясно, что математическое ожиданіе игрока, поставившаго на одинъ нумеръ, будетъ *отрицательнымъ* числомъ $-\frac{1}{37}$, такъ какъ выигрышъ банка есть проигрышъ игрока и обратно.

При ставкѣ на два нумера математическое ожиданіе выигрыша банка будетъ $\frac{35}{37}$, а проигрыша $17\cdot\frac{2}{37}$, и математическое ожиданіе банка опять выразится тѣмъ же числомъ $\frac{35}{37}-17\cdot\frac{2}{37}=\frac{1}{37}$

Вообще, получается математическое ожиданіе $\frac{1}{37}$ при всѣхъ комбинаціяхъ, за исключеніемъ простыхъ шансовъ, такъ какъ при простыхъ шансахъ существуетъ одно добавочное правило игры, уменьшающее на половину математическое ожиданіе банка.

Указанное добавочное правило состоитъ въ слѣдующемъ. Пусть ставка a поставлена на красный цвѣтъ. Если выходитъ «*нуль*», то ставка остается подъ арестомъ (en prison) до слѣдующаго удара, при чемъ при выходѣ краснаго цвѣта ставка возвращается игроку и забирается банкомъ при выходѣ чернаго цвѣта. При вторичномъ выходѣ *нуля* ставка остается подъ арестомъ до слѣдующаго удара и т. д.

Итакъ, пусть ставка 1 поставлена на красный цвѣтъ, тогда банкъ проигрываетъ 1 при выходѣ краснаго цвѣта, что даетъ математическое ожиданіе $-\frac{18}{37}$.

Банкъ выигрываетъ или на первомъ ударѣ, если выйдетъ черный цвѣтъ, вѣроятность чего равна $\frac{18}{37}$, или на второмъ ударѣ, вѣроятность чего $\left(\frac{1}{37}\cdot\frac{18}{37}\right)$ равна произведенію вѣроятности $\frac{1}{37}$ выхода нуля на первомъ ударѣ на вѣроятность $\frac{18}{37}$ выхода чернаго цвѣта на второмъ ударѣ.

Если банкъ выигрываетъ на третьемъ ударѣ послѣ друкратнаго появленія нуля, то вѣроятность этого выигрыша будетъ $\frac{1}{37}\cdot\frac{1}{37}\cdot\frac{18}{37}$.

Вообще говоря, вѣроятность банку выиграть ставку на нѣкоторомъ ударѣ выразится рядомъ

$$\frac{18}{37}+\frac{18}{37^2}+\frac{18}{37^3}+\frac{18}{37^4}+\cdots=\frac{18}{37}\frac{1}{1-\frac{1}{37}}=\frac{1}{2}.$$

Итакъ, общее математическое ожиданіе выгоды банка на простомъ шансѣ будетъ

$$\frac{1}{2}-\frac{18}{37}=\frac{1}{2\cdot 37}.$$

На этомъ обстоятельствѣ основано новое правило игры, позволяющее игроку, поставившему на простой шансъ, взять при выходѣ *нуля* назадъ половину ставки, не дожидаясь слѣдующаго удара.

Существуетъ еще одно весьма важное правило игры, состоящее въ установленіи предѣла для ставокъ (mise maximum). Это правило характеризуется тѣмъ, что банкъ не выдаетъ болѣе 6000 франковъ отдѣльному игроку на его ставку. Отсюда вытекаетъ, что нельзя ставить болѣе 6000 на простой шансъ, нельзя ставить болѣе $3000=\frac{6000}{2}$ на дюжину, болѣе $1200=$ $=\frac{6000}{5}$ на шесть нумеровъ и т. д.

Этимъ правиломъ банкъ обезпечиваетъ себя отъ такъ называемой *системной* игры.

Представимъ себѣ очень богатаго человѣка, который будетъ играть такъ: поставитъ монету 5 франковъ на простой шансъ, если проиграетъ, то поставитъ *удвоенную* ставку 10 фр. на этотъ же шансъ, если проиграетъ, то поставитъ *учетверенную* ставку 20 фр. на тотъ же шансъ и далѣе будетъ удваивать ставку на тотъ же шансъ; тогда, какъ легко замѣтить, при первомъ выигрышѣ онъ возвращаетъ назадъ всѣ раньше проигранныя ставки и кромѣ того остается въ *выигрышѣ одной монеты 5 фр.* Откладываетъ выигранную монету въ карманъ, и начинаетъ снова игру съ удвоеніемъ ставокъ. Такъ какъ очевидно, что простой шансъ, напримѣръ красный цвѣтъ, долженъ когда нибудь появиться, то такимъ образомъ получается какъ бы вѣрный способъ остаться въ выигрышѣ.

Существованіе предѣла для ставокъ дѣлаетъ такую системную игру очень рискованной.

Въ самомъ дѣлѣ, игрокъ не можетъ поставить заразъ болѣе 1 200 монетъ, слѣдовательно, если онъ начинаетъ удваивать ставки, то его ставки будутъ

(1) $1_м, 2_м, 4_м, 8_м, 16_м, 32_м, 64_м, 128_м, 256_м, 512_м, 1024_м,$

и больше удваивать онъ не имѣетъ права, такъ что если всѣ 11 его ставокъ биты, то въ погонѣ за выигрышемъ *одной* монеты онъ проигрываетъ 2047 монетъ [сумма чиселъ (1)].

Наблюденіе показываетъ (ведутся подробные журналы выходящихъ нумеровъ, охотно покупаемые игроками), что очень часто случается, что какой нибудь простой шансъ не выходитъ подъ-рядъ 15—20 разъ, а потому вѣроятность неудачи системной игры значительна.

Несмотря на рискъ подобной системной игры, часто отдѣльные игроки съ успѣхомъ ее примѣняютъ. По словамъ одного изъ крупье, пришлось бы закрыть рулетку, если бы вся публика играла по указанной системѣ.

Указанная нами игра съ удвоеніемъ ставокъ на одинъ и тотъ же шансъ носитъ названіе *poursuivre la chance* (преслѣдованіе шанса).

Подъ названіемъ *poursuivre le gagnant* (преслѣдованіе выигравшаго шанса) разумѣется та же игра съ удвоеніемъ ставокъ, когда игрокъ ставитъ на цвѣтъ, только что передъ тѣмъ выигравшій. Тутъ игрокъ ожидаетъ повторенія одного цвѣта два раза подъ-рядъ.

Весь вышеприведенный анализъ показываетъ, что рулетка есть игра обидная въ пользу банка. Милліоны, выручаемые рулеткой, являются фактическимъ подтвержденіемъ нашей теоріи, что игрокъ съ положительнымъ математическимъ ожиданіемъ можетъ выиграть при большомъ числѣ игръ сколь угодно много.

Итакъ, колоссальные доходы отъ рулетки основаны на математической организаціи самой игры. Во всемъ остальномъ дѣло поставлено вполнѣ корректно, и всѣ служащіе рулетки проявляютъ полную предупредительность къ публикѣ.

При организаціи игры, очевидно, участвовали серьезные математики, которые обезпечили банку всѣ выгоды и въ полной мѣрѣ обезопасили его отъ риска, а потому представляются возмутительнымъ шарлатанствомъ всѣ совѣты относительно способовъ вѣрнаго выигрыша.

Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ совѣтъ каждому отдѣльному лицу *не играть въ рулетку*.

Если человѣкъ желаетъ все-таки играть, то *не слѣдуетъ играть долго*, такъ какъ, чѣмъ дольше человѣкъ играетъ, тѣмъ больше проявляется выгода банка.

Безнравственная сторона дѣла состоитъ во вліяніи рулетки на неуравновѣшенную психическую сторону игрока.

Груды золота и блестящая обстановка, въ которой совершается игра, пробуждаютъ корыстолюбіе, и очень часто люди, желая выиграть очень много, не могутъ во-время остановиться и проигрываютъ послѣднія деньги.

Въ заключеніе замѣтимъ, что журналы, печатающіе выходящіе въ рулеткѣ на разныхъ столахъ нумера, конечно, не приносятъ никакой пользы охотно изучающимъ ихъ игрокамъ, но для лица, знакомаго съ теоріей вѣроятностей, эти журналы интересны съ чисто теоретической стороны. Такъ, напримѣръ, подтверждается законъ большихъ чиселъ (См. далѣе). Красный и черный цвѣта появляются при большомъ числѣ наблюденій приблизительно въ одинаковомъ количествѣ. Но за все время существованія рулетки былъ одинъ случай, когда на одномъ столѣ въ продолженіе двухъ мѣсяцевъ одинъ цвѣтъ выходилъ въ количествѣ вдвое большемъ, чѣмъ другой. Такое явленіе ничего невозможнаго не представляетъ. Его малая вѣроятность имѣла слѣдствіемъ то, что оно случилось только одинъ разъ за всю практику рулетки. Было бы ошибочнымъ думать, что дальнѣйшее продолженіе игры должно сопровождаться компенсирующимъ болѣе частымъ появленіемъ другого цвѣта. Такое предположеніе противорѣчило бы случайности и независимости выхода того или другого нумера.

JACOBI BERNOULLI,

Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
Mathematici Celeberrimi,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

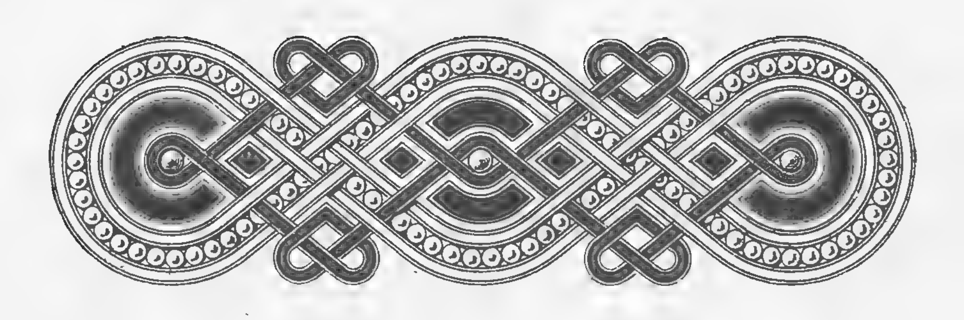
TRACTATUS DE SERIEBUS INFINITIS,

Et Epistola Gallicè scripta

DE LUDO PILÆ RETICULARIS.



BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
CIↃ IↃCC XIII.



Теорема Якова Бернулли.

—

Въ 1713 году въ Базелѣ появилось посмертное сочиненіе знаменитаго математика Якова Бернулли подъ заглавіемъ «*Ars Conjectandi*» («Искусство предположеній»), снимокъ съ заглавнаго листа котораго данъ на предыдущей страницѣ. Сочиненіе это можно считать краеугольнымъ камнемъ, на которомъ мало-по-малу было воздвигнуто все современное зданіе Теоріи Вѣроятностей. Въ четвертой части этой книги формулирована и доказана знаменитая теорема Я. Бернулли, положившая начало такъ называемому *закону большихъ чиселъ*, играющему въ современномъ естествознаніи огромную роль. Теорема излагается (элементарно) въ IV и V главахъ 4-ой части книги Я. Бернулли. Мы приводимъ эти главы въ переводѣ приватъ-доцента Я. В. Успенскаго, сдѣланномъ подъ редакціей академика А. А. Маркова и изданномъ нашей Академіей Наукъ въ ознаменованіе 200-лѣтія (въ 1913 г.) со времени появленія «*Ars Conjectandi*» въ свѣтъ. Я. В. Успенскимъ переведена вся четвертая часть книги, и она имѣется въ отдѣльной продажѣ подъ заглавіемъ «Часть четвертая сочиненія Якова Бернулли «*Ars Conjectandi*» (цѣна 45 коп.).

—

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

О двоякомъ способѣ опредѣленія числа случаевъ. Что слѣдуетъ думать о томъ способѣ, который опирается на опытъ. Особенная задача, представляющаяся по этому поводу. И проч.

... По числу случаевъ, въ которыхъ доводы для какихъ-либо вещей могутъ существовать или не существовать, доказывать или не доказывать или даже доказывать противное, могутъ быть подвергнуты вычисленію и измѣрены доказательныя силы ихъ и соотвѣтствующія вѣроятности. Все дѣло сводится къ тому, чтобы для правильнаго составленія предположеній о какой-либо вещи были точно исчислены какъ числа тѣхъ случаенъ, такъ равно было бы опредѣлено, насколько одни могутъ легче встрѣтиться, чѣмъ другіе. Но здѣсь мы, повидимому, встрѣчаемъ препятствіе, такъ какъ только крайне рѣдко это возможно сдѣлать и почти нигдѣ не удается, кромѣ игръ, зависящихъ отъ случая, которыя первые изобрѣтатели, постаравшись сдѣлать безобидными, устроили такъ, чтобы были совершенно извѣстны числа случаевъ, влекущихъ выигрышъ или проигрышъ, а сами случаи могли бы встрѣтиться одинаково легко. Въ большинствѣ же другихъ явленій, зависящихъ или отъ дѣйствій силъ естественныхъ, или отъ свободной воли людей, не имѣетъ мѣста ни то, ни другое. Такъ, напр., извѣстно число случаевъ при игрѣ въ кости. Для каждой кости ихъ, очевидно, столько, сколько граней, и всѣ они равновозможны, такъ какъ вслѣдствіе подобія граней и равномѣрной плотности кости нѣтъ никакого основанія, почему одна грань могла бы легче открыться, чѣмъ другая. Такъ было бы, если бы грани были различной формы или кость въ одной части состояла изъ болѣе тяжелаго матеріала, чѣмъ въ другой. Такъ, равнымъ образомъ, извѣстно число случаевъ при извлеченіи изъ урны билетика бѣлаго или чернаго, и извѣстно, что всѣ они одинаково возможны; именно потому, что опредѣлено и извѣстно число билетовъ обѣихъ категорій и не видно никакого основанія выйти одному изъ нихъ легче, чѣмъ всякому другому. Но, спрашивается, кто изъ смертныхъ когда-либо опредѣлитъ, какъ такое же число случаевъ, число, напр., болѣзней, которыя во всякомъ возрастѣ поражаютъ безчисленное множество частей человѣческаго тѣла и могутъ намъ причинить смертъ; и насколько одна болѣзнь легче погубитъ человѣка, чѣмъ другая: напр., чума, чѣмъ водобоязнь, водобоязнь, чѣмъ лихорадка, чтобы отсюда можно было составить предположеніе о жизни или смерти въ будущемъ? Кто также сочтетъ безчисленные случаи перемѣнъ, которымъ ежедневно подвергается воздухъ,

чтобы отсюда можно было сдѣлать предположенiе, каково будетъ его состоянiе черезъ мѣсяцъ или, тѣмъ паче, черезъ годъ? Опять, кто достаточно знаетъ природу человѣческаго ума или удивительное устройство нашего тѣла, чтобы въ играхъ, зависящихъ вполнѣ или отчасти отъ остроты ума или ловкости тѣла, дерзнуть опредѣлить случаи, когда тотъ или другой изъ участниковъ игры можетъ одержать побѣду или потерпѣть пораженiе? Такъ какъ это и подобное зависитъ отъ причинъ совершенно скрытыхъ и, сверхъ того, вслѣдствiе безконечнаго разнообразiя ихъ сочетанiй,



Яковъ Бернулли (1654—1705).

всегда ускользающихъ отъ нашего познанiя, то было бы совершенно безумно желать что-либо узнать такимъ путемъ. Но здѣсь намъ открывается другая дорога для достиженiя искомаго. И что не дано вывести a priori, то, по крайней мѣрѣ, можно получить a posteriori, т. е. изъ многократнаго наблюденiя результатовъ въ подобныхъ примѣрахъ.

Потому что должно предполагать, что нѣкоторое явленiе впослѣдствiи въ столькихъ же случаяхъ можетъ случиться или не случиться, въ сколькихъ при подобномъ же положенiи вещей раньше оно было отмѣчено случившимся или не случившимся. Ибо, если, напр., при наблюденiяхъ, сдѣланныхъ надъ тремя стами людей того же возраста и сложенiя, какъ теперь

Титъ, было замѣчено, что изъ нихъ двѣсти до истеченія десяти лѣтъ умерли, а остальные остались въ живыхъ и дольше, то можно заключить съ достаточнымъ основаніемъ, что вдвое больше случаевъ и Титу умереть въ теченіе ближайшаго десятилѣтія, чѣмъ остаться въ живыхъ по истеченіи этого срока. Также, если кто-либо будетъ разсматривать состояніе погоды за очень большое число истекшихъ годовъ и будетъ отмѣчать, сколько разъ она была ясной или дождливой, или кто-либо очень часто будетъ присутствовать при игрѣ двоихъ и наблюдать, сколько разъ тотъ или другой оказывается въ игрѣ побѣдителемъ, то тѣмъ самымъ откроетъ отношеніе, въ которомъ, вѣроятно, находятся числа случаевъ, когда то же событіе при обстоятельствахъ, подобныхъ прежнимъ, и въ будущемъ можетъ случиться или не случиться. Этотъ опытный способъ опредѣленія числа случаевъ по наблюденіямъ не новъ и не необыченъ. Ибо и знаменитый авторъ «L'art de penser», мужъ большого ума и проницательности, въ гл. 12 и слѣд. послѣдней части предписываетъ подобное же, и то же всѣ постоянно соблюдаютъ въ повседневной практикѣ. Далѣе, всякому ясно и то, что для такого разсужденія о какомъ-лобо явленіи не достаточно взять одно или другое наблюденіе, но требуется большой запасъ наблюденій. Потому-то даже самый ограниченный человѣкъ по какому-то природному инстинкту самъ собой и безъ всякаго предварительнаго обученія (что очень удивительно) знаетъ, что чѣмъ больше принято во вниманіе такихъ наблюденій, тѣмъ менѣе опасность не достичь цѣли. Хотя это естественнымъ образомъ всѣмъ извѣстно, однако доказательство, извлекаемое изъ научныхъ основаній, вовсе не такъ обычно, и потому намъ предстоитъ его здѣсь изложить. При чемъ я счелъ бы для себя малой заслугой, если бы остановился на доказательствѣ только того, что всѣ знаютъ. Здѣсь для разсмотрѣнія остается нѣчто, о чемъ до сихъ поръ, можетъ быть, никто и не подумалъ. Именно, остается изслѣдовать, будетъ ли при такомъ увеличеніи числа наблюденій вѣроятность достичь дѣйствительнаго отношенія между числами случаевъ, при которыхъ какое-либо событіе можетъ случиться или не случиться, постоянно возрастать такъ, чтобы, наконецъ, превзойти всякую степень достовѣрности, или же задача, такъ сказать, имѣетъ свою асимптоту, т. е. имѣется такая степень достовѣрности, которую никогда нельзя превзойти, какъ бы ни умножались наблюденія; такъ что, напр., никогда нельзя имѣть увѣренность болѣе половины или $\frac{2}{3}$, или $\frac{3}{4}$ достовѣрности въ томъ, что мы нашли истинное отношеніе случаевъ. Чтобы на примѣрѣ было ясно, чего я хочу, я предполагаю, что въ нѣкоторой урнѣ, безъ твоего вѣдома, скрыты три тысячи бѣлыхъ и двѣ тысячи черныхъ камешковъ и что ты, для опредѣленія числа ихъ опытомъ, извлекаешь одинъ камешекъ за

другимъ (однако, каждый разъ кладя обратно извлеченный до вынутія слѣдующаго, дабы не уменьшалось число камешковъ въ урнѣ) и замѣчаешь, сколько разъ выходитъ бѣлый и сколько разъ—черный. Требуется узнать, можешь ли ты это продѣлать столько разъ, чтобы въ десять, въ сто, въ тысячу разъ и т. д. было вѣроятнѣе (т. е. оказалось бы, наконецъ, нравственно достовѣрнымъ), что числа появленій бѣлыхъ и черныхъ будутъ находиться въ томъ же отношеніи 3 къ 2, въ какомъ находятся самыя числа камешковъ, чѣмъ въ какомъ-либо другомъ отношеніи, отъ этого отличномъ? Если бы этого не случилось, то, признаюсь, слѣдовало бы усомниться въ нашей попыткѣ опредѣлять числа случаевъ изъ опытовъ. Но если это достигается и такимъ путемъ, наконецъ, получается нравственная достовѣрность (а что это на самомъ дѣлѣ такъ, — я покажу въ слѣдующей главѣ), то находимъ числа случаевъ a posteriori почти съ тою же точностью, какъ если бы они были намъ извѣстны a priori; что въ общественной жизни, гдѣ нравственно достовѣрное принимается за вполнѣ достовѣрное, безъ сомнѣнія, вполнѣ достаточно, дабы направить наши предположенія въ какомъ угодно предметѣ случайномъ не менѣе научно, чѣмъ въ играхъ. Ибо если мы урну замѣнимъ воздухомъ, напр., или человѣческимъ тѣломъ, которые содержатъ въ себѣ источники разныхъ перемѣнъ или болѣзней, подобно тому какъ урна—камешки, то мы будемъ въ состояніи совершенно также наблюденіями опредѣлить, насколько легче въ этихъ вещахъ можетъ получиться то или другое явленіе. Чтобы не понимать этого превратно, слѣдуетъ замѣтить, что отношеніе между числами случаевъ, которые мы желаемъ опредѣлить опытомъ, понимается не въ смыслѣ точнаго отношенія (ибо при такомъ воззрѣніи случилось бы какъ разъ обратное, и вѣроятность найти истинное отношеніе была бы тѣмъ меньше, чѣмъ болѣе было взято наблюденій), но до извѣстной степени приближеннаго, т. е. заключеннаго въ двухъ границахъ, которыя можно взять сколь угодно тѣсными. Именно, если въ только что приведенномъ примѣрѣ камешковъ возьмемъ два отношенія $\frac{301}{200}$ и $\frac{299}{200}$ или $\frac{3001}{2000}$ и $\frac{2999}{2000}$ и т. д., изъ которыхъ одно весьма близко, но больше, а другое весьма близко, но меньше отношенія $\frac{3}{2}$, то будетъ показано, что, задавъ какую угодно вѣроятность, можно сдѣлать болѣе вѣроятнымъ, что найденное изъ многихъ наблюденій отношеніе будетъ заключено въ этихъ предѣлахъ полуторнаго отношенія, а не внѣ ихъ.

Вотъ, слѣдовательно, какова задача, которую я здѣсь рѣшилъ обнародовать послѣ того, какъ уже въ теченіе двадцати лѣтъ владѣлъ ея рѣшеніемъ. Новизна этой задачи и величайшая польза, сопряженная съ такою

же трудностью, можетъ придать вѣсъ и цѣну всѣмъ другимъ главамъ этого ученія. Но прежде изложенія ея рѣшенія я въ краткихъ словахъ защищусь отъ возраженій, которыя выставили нѣкоторые ученые мужи противъ этихъ положеній.

1) Во-первыхъ, возражаютъ, что одно—отношеніе камешковъ, а другое—отношеніе болѣзней или перемѣнъ воздуха. Именно, число первыхъ опредѣленное, а вторыхъ—неопредѣленное. На это я возражаю, что и то, и другое въ отношеніи къ нашему познанію одинаково можетъ считаться неопредѣленнымъ и неяснымъ. Но все, что само по себѣ и по своей природѣ таково, мы можемъ представить себѣ не лучше, чѣмъ вещь, одновременно созданную Творцомъ природы и не созданную; ибо все сотворенное Богомъ опредѣляется уже при самомъ твореніи.

2) Во-вторыхъ, возражаютъ, что число камешковъ конечно, а болѣзней и проч. безконечно. **Отв.** Скорѣе невообразимо большое, чѣмъ безконечное. Но допустимъ, что на самомъ дѣлѣ—безконечно большое. Извѣстно, что даже между двумя безконечностями можетъ существовать опредѣленное отношеніе, выразимое конечными числами или точно, или, по крайней мѣрѣ, съ какимъ угодно приближеніемъ. Такъ, отношеніе каждой окружности къ діаметру опредѣленное, которое, правда, точно не выражается иначе, какъ круговымъ числомъ Лудольфа, безконечно продолженнымъ [1]; однако, Архимедомъ, Меціемъ и самимъ Лудольфомъ заключено въ предѣлы, весьма удовлетворительно близкіе для практики. Поэтому, ничто не препятствуетъ, чтобы отношеніе двухъ безконечностей, приближенно выраженное конечными числами, также могло быть опредѣлено конечнымъ числомъ опытовъ.

3) Говорятъ, въ-третьихъ, что число болѣзней не остается постояннымъ, но каждый день возникаютъ новыя. **Отв.** Что съ теченіемъ времени болѣзни могутъ умножаться,—этого мы не можемъ отвергать и несомнѣнно, что тотъ, кто пожелаетъ изъ теперешнихъ наблюденій сдѣлать заключенія о временахъ до-дилювіанскихъ предковъ, весьма сильно отклонится отъ истины. Но отсюда ничего не слѣдуетъ, кромѣ того, что иногда нужно возобновлять наблюденія, подобно тому, какъ слѣдовало бы возобновлять наблюденія и съ камешками, если бы предполагать число ихъ въ урнѣ измѣняющимся.

---

[1]) Число π.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Рѣшеніе предыдущей задачи.

Чтобы изложить длинное доказательство съ возможною краткостью и ясностью, я попытаюсь свести все къ чистой математикѣ, извлекая изъ нея слѣдующія леммы, послѣ доказательства которыхъ все остальное сведется только къ ихъ примѣненію.

Лемма 1. Пусть данъ рядъ сколькихъ угодно чиселъ 0, 1, 2, 3, 4 и т. д., слѣдующихъ, начиная отъ нуля, въ естественномъ порядкѣ, изъ которыхъ крайнее и наибольшее пусть будетъ $r+s$, какое либо среднее r и два ближайшихъ къ нему числа съ обѣихъ сторонъ $r+1$ и $r-1$. Пусть, далѣе, этотъ рядъ будетъ продолженъ до тѣхъ поръ, пока крайній членъ не сдѣлается равнымъ какому-нибудь кратному числа $r+s$, т. е. пока не сдѣлается равнымъ $nr+ns$. Въ томъ же отношеніи увеличатся среднее число r и рядомъ съ нимъ стоящія $r+1$ и $r-1$, такъ что вмѣсто нихъ получается nr, $nr+n$, $nr+n$, и первоначальный рядъ

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ \ r-1,\ r,\ r+1,\ldots\ r+s$$

обратится въ такой:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ \ nr-n,\ldots\ nr,\ldots\ nr+n,\ldots\ nr+ns.$$

Съ возрастаніемъ n такимъ образомъ будетъ увеличиваться какъ число членовъ, которые лежатъ между среднимъ nr и однимъ изъ предѣльныхъ $nr+n$ или $nr-n$, такъ и число тѣхъ, которые идутъ отъ этихъ предѣловъ до крайнихъ членовъ $nr+ns$ или 0. Но, однако, никогда (какъ бы велико ни было взято n) число членовъ за большимъ предѣломъ $nr+n$ не будетъ болѣе, чѣмъ въ $s-1$ разъ, и число членовъ передъ меньшимъ предѣломъ $nr-n$ не будетъ болѣе, чѣмъ въ $r-1$ разъ, превышать число заключенныхъ между среднимъ nr и однимъ изъ предѣловъ $nr+n$ или $nr-n$. Ибо послѣ вычитанія ясно, что между большимъ предѣломъ и крайнимъ членомъ $nr+ns$ имѣется $ns-n$ промежуточныхъ членовъ, и между меньшимъ предѣломъ и крайнимъ 0 имѣется $nr-n$ промежуточныхъ членовъ, между среднимъ и каждымъ изъ предѣловъ n промежуточныхъ членовъ. Но всегда $(ns-n):n=s-1:1$ и $(nr-n):n=r-1:1$. Откуда слѣдуетъ и т. д.

Лемма 2. Всякая цѣлая степень какого-либо двучлена $r+s$ выражается числомъ членовъ, на единицу большимъ числа единицъ въ показателѣ степени. Ибо квадратъ содержитъ 3 члена, кубъ 4, биквадратъ 5 и т. д., какъ извѣстно.

Лемма 3. Въ любой степени этого двучлена (по крайней мѣрѣ, такой, которой показатель равенъ двучлену $r+s=t$ или его кратному,—напр., $nr+ns=nt$—нѣкоторый членъ M будетъ наибольшимъ, если числа предшествующахъ ему и слѣдующихъ за нимъ членовъ находятся въ отношенiи s къ r или, что то же, если въ этомъ членѣ показатели буквъ r и s находятся въ отношенiи самихъ количествъ r и s; болѣе близкiй къ нему членъ съ той и съ другой стороны больше болѣе удаленнаго съ той же стороны; но тотъ же членъ M имѣетъ къ болѣе близкому меньшее отношенiе, чѣмъ болѣе близкiй къ болѣе удаленному при равномъ числѣ промежуточныхъ членовъ.

Док. 1. Геометрамъ хорошо извѣстно, что степень nt двучлена $r+s$, т. е. $(r+s)^{nt}$, выражается такимъ рядомъ

$$r^{nt}+\frac{nt}{1}r^{nt-1}s+\frac{nt\,(nt-1)}{1\,.\,2}r^{nt-2}s^2+\frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)}{1\,.\,2\,.\,3}r^{nt-3}s^3+\ldots$$

Въ этомъ ряду степени r постепенно уменьшаются, а степени s увеличиваются, при чемъ коэффицiенты второго и предпослѣдняго члена $\frac{nt}{1}$, 3-го съ начала и 3-го съ конца $\frac{nt\,(nt-1)}{1\,.\,2}$, 4-го съ начала и 4-го съ конца $\frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ и т. д. Такъ какъ число всѣхъ членовъ кромѣ M, по леммѣ 2, есть $nt=nr+ns$, а по предположенiю, числа членовъ, предшествующихъ этому и за нимъ слѣдующихъ, относятся какъ s къ r, то число тѣхъ членовъ, которые предшествуютъ M, будетъ ns, а тѣхъ, которые за нимъ слѣдуютъ,—nr. Откуда, по закону образованiя ряда, членъ M будетъ

$$\frac{nt\,(nt-1)\ldots(nr+1)}{1\,.\,2\ldots ns}r^{nr}s^{ns}$$

или

$$\frac{nt\,(nt-1)\ldots(ns+1)}{1\,.\,2\ldots nr}r^{nr}s^{ns}.$$

и подобнымъ же образомъ ближайшiй къ нему членъ

слѣва	справа
$\frac{nt\,(nt-1)\ldots(nr+2)}{1\,.\,2\ldots(ns-1)}r^{nr+1}s^{ns-1}$	$\frac{nt\,(nt-1)\ldots(ns+2)}{1\,.\,2\ldots(nr-1)}r^{nr-1}s^{ns+1}$

и равнымъ образомъ слѣдующiй

слѣва	справа
$\frac{nt\,(nt-1)\ldots(nr+3)}{1\,.\,2\ldots(ns-2)}r^{nr+2}s^{ns-2}$	$\frac{nt\,(nt-1)\ldots(ns+3)}{1\,.\,2\ldots(nr-2)}r^{nr-2}s^{ns+2}.$

Откуда, послѣ предварительнаго сокращенія общихъ множителей, станетъ яснымъ, что членъ M относится къ ближайшему слѣва, какъ $(nr+1)$ s къ $ns \cdot r$, этотъ къ слѣдующему, какъ $(nr+2)\, s$ къ $(ns-1)\, r$ и проч. и также, что членъ M относится къ ближайшему справа, какъ $(ns+1)\, r$ къ $nr \cdot s$, а этотъ къ слѣдующему, какъ $(ns+2)\, r$ къ $(nr-1)\, s$ и проч.

Но

$$(nr+1)\, s > nrs$$

и

$$(nr+2)\, s > nsr - r \text{ и проч.}$$

Также

$$(ns+1)\, r > nsr$$

и

$$(ns+2)\, r > nrs \text{ и проч.} - s$$

Слѣдовательно, членъ M больше ближайшаго съ обѣихъ сторонъ, а этотъ—больше болѣе удаленнаго съ той же стороны и проч. Ч. т. д.

2) Отношеніе $\frac{nr+1}{ns}$ меньше отношенія $\frac{nr+2}{ns-1}$, что ясно; поэтому, послѣ умноженія на одно и то же отношеніе $\frac{s}{r}$ будетъ

$$\frac{(nr+1)\, s}{nsr} < \frac{(nr+2)\, s}{(ns-1)\, r}.$$

Подобно этому отношеніе $\frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$; слѣдовательно, по умноженіи на отношеніе $\frac{r}{s}$ также

$$\frac{(ns+1\, r}{nrs} < \frac{(ns+2)\, r}{(nr-1)\, s}.$$

Но отношеніе

$$\frac{(nr+1)\, s}{nsr}$$

равно отношенію члена M къ ближайшему слѣва, и отношеніе

$$\frac{(nr+2)\, s}{(ns-1)\, r}$$

равно отношенію этого члена къ слѣдующему. Также отношеніе

$$\frac{(ns+1)\, r}{nrs}$$

равно отношенію члена M къ ближайшему справа, и

$$\frac{(ns+2)\, r}{(nr-1)\, s}$$

равно отношенію этого члена къ слѣдующему. То, что только что показано, можно равнымъ образомъ примѣнить и ко всѣмъ прочимъ членамъ.

Вслѣдствіе этого наибольшій членъ M имѣетъ меньшее отношеніе къ болѣе близкимъ членамъ съ обѣихъ сторонъ, чѣмъ (при равномъ числѣ промежуточныхъ членовъ) болѣе близкій къ болѣе удаленному съ той же стороны. Ч. т. д.

Лемма 4. Въ степени двучлена съ показателемъ nt число n можетъ быть взято столь большимъ, чтобы отношеніе наибольшаго члена M къ двумъ другимъ L и Λ, отстоящимъ отъ него налѣво и направо на n членовъ, превзошло всякое данное отношеніе.

Док. Такъ какъ въ предыдущей леммѣ наибольшій членъ M былъ найденъ равнымъ

$$\frac{nt(nt-1)\ldots(nr+1)}{1\cdot 2\ldots ns}r^{nr}s^{ns}$$

или

$$\frac{nt(nt-1)\ldots(ns+1)}{1\cdot 2\ldots nr}r^{nr}s^{ns},$$

то по закону образованія ряда члены L и Λ будутъ

L слѣва	Λ справа
$\frac{nt(nt-1)\ldots(nr+n+1)}{1\cdot 2\ldots(ns-n)}r^{nr+n}s^{ns-n}$	$\frac{nt(nt-1)\ldots(ns+n+1)}{1\cdot 2\ldots(nr-n)}r^{nr-n}s^{ns+n}$,

откуда получается послѣ приличныхъ сокращеній на общіе множители

$$\frac{M}{L}=\frac{(nr+n)(nr+n-1)\ldots(nr+1)\cdot s^n}{(ns-n+1)(ns-n+2)\ldots ns\cdot r^n}$$

$$\frac{M}{\Lambda}=\frac{(ns+n)(ns+n-1)\ldots(ns+1)\cdot r^n}{(nr-n+1)(nr-n+2)\ldots nr\cdot s^n}$$

или

$$\frac{M}{L}=\frac{(nrs+ns)(nrs+ns-s)\ldots(nrs+s)}{(nrs-nr+r)(nrs-nr+2r)\ldots nrs}$$

$$\frac{M}{\Lambda}=\frac{(nrs+nr)(nrs+nr-r)\ldots(nrs+r)}{(nrs-ns+s)(nrs-ns+2s)\ldots nrs}.$$

Но эти отношенія будутъ безконечно большими, когда n полагается безконечнымъ: ибо тогда исчезаютъ числа 1, 2, 3 и проч. по сравненію съ n, и сами числа $nr\pm n\mp 1$, $nr\pm n\mp 2$, $nr\pm n\mp 3$ и проч., и $ns\pm n\mp 1$, $ns\pm n\mp 2$, $ns\pm n\mp 3$ и проч. будутъ имѣть то же значеніе, какъ $nr\pm n$ и $ns\pm n$, такъ что по раздѣленіи на n получится

$$\frac{M}{L}=\frac{(rs+s)(rs+s)\ldots rs}{(rs-r)(rs-r)\ldots rs},\quad \frac{M}{\Lambda}=\frac{(rs+r)\,rs+r)\ldots rs}{(rs-s)(rs-s)\ldots rs}.$$

Эти отношенія составляются, какъ ясно, изъ столькихъ отношеній $\frac{rs+s}{rs-r}$ или $\frac{rs+r}{rs-s}$, сколько есть множителей; а ихъ число n, т. е. безконечное, такъ какъ между первыми множителями $nr+n$ или $ns+n$ и послѣдними $nr+1$ и $ns+1$ разность есть $n-1$. Вслѣдствіе чего эти отношенія будутъ безконечными степенями $\frac{rs+s}{rs-r}$ и $\frac{rs+r}{rs-c}$ и потому безконечно большими. Если ты сомнѣваешься въ этомъ заключеніи, то представь себѣ безконечное число чиселъ въ непрерывной пропорціи съ отношеніемъ $rs+s$ къ $rs-r$ или $rs+r$ къ $rs-s$. Отношеніе перваго числа къ третьему будетъ квадратомъ, перваго къ 4-му—кубомъ, перваго къ 5-му—четвертой степенью, и т. д.; наконецъ, перваго къ послѣднему—безконечной степенью отношенія $\frac{rs+s}{rs-r}$ или $\frac{rs+r}{rs-s}$; но извѣстно, что отношеніе перваго члена къ послѣднему безконечно большое, такъ какъ послѣдній членъ $=0$. Поэтому, ясно, что безконечныя степени отношенія $\frac{rs+s}{rs-r}$ или $\frac{rs+r}{rs-s}$ безконечнѣ велики. Такимъ образомъ, показано, что въ безконечно высокой степени двучлена отношеніе наибольшаго члена къ двумъ другимъ L и Λ превосходитъ всякое заданное отношеніе. Ч. т. д.

Лемма 5. Предположивъ то же, что выше, можно представить такое большое число n, чтобы сумма всѣхъ членовъ отъ средняго и наибольшаго M до обоихъ членовъ L и Λ включительно имѣла къ суммѣ всѣхъ другихъ внѣ предѣловъ L и Λ, взятыхъ въ какомъ-угодно числѣ, отношеніе, большее всякаго заданнаго.

Док. Члены между наибольшимъ M и предѣльнымъ слѣва L пусть обозначаются: второй отъ наибольшаго — F, третій — G, четвертый — H и т. д., и за предѣломъ L: второй отъ него P, третій—Q, четвертый—R и т. д. Такъ какъ по второй части леммы 3 отношенія

$$\frac{M}{F}<\frac{L}{P},\quad \frac{F}{G}<\frac{P}{Q},\quad \frac{G}{H}<\frac{Q}{R} \text{ и т. д.,}$$

то также будетъ

$$\frac{M}{L}<\frac{F}{P}<\frac{G}{Q}<\frac{H}{R} \text{ и т. д.}$$

Такъ какъ по леммѣ 4, при n безконечно большомъ отношеніе $\frac{M}{L}$ безконечно, то тѣмъ болѣе будутъ безконечными отношенія $\frac{F}{P}, \frac{G}{Q}, \frac{H}{R}, \ldots,$ и потому отношеніе

$$\frac{F+G+H+\ldots}{P+Q+R+\ldots}$$

также безконечно, т. е. сумма членовъ между наибольшимъ M и предѣломъ L безконечно больше суммы такого же числа членовъ за предѣломъ L и наиболѣе къ нему близкихъ. И такъ какъ число всѣхъ членовъ за предѣломъ L превышаетъ, по леммѣ 1, не болѣе чѣмъ въ $s-1$ разъ (т. е. конечное число разъ) число членовъ между этимъ предѣломъ и наибольшимъ членомъ M, а сами члены дѣлаются тѣмъ меньше, чѣмъ дальше они отстоятъ отъ предѣла, по 1-ой части 3-ей леммы, то сумма всѣхъ членовъ между M и L (даже не считая M) будетъ безконечно больше суммы всѣхъ членовъ за предѣломъ L. Съ другой стороны, подобнымъ же образомъ доказывается, что сумма всѣхъ членовъ между M и Λ безконечно больше суммы всѣхъ членовъ за предѣломъ Λ (число которыхъ превышаетъ число первыхъ не болѣе, чѣмъ въ $r-1$ разъ по леммѣ 1). Поэтому, наконецъ, сумма всѣхъ членовъ, заключенныхъ между предѣлами L и Λ (за исключеніемъ наибольшаго), будетъ безконечно больше суммы всѣхъ членовъ, расположенныхъ за этими предѣлами; и тѣмъ паче, слѣдовательно, вмѣстѣ съ наибольшимъ. Ч. т. д.

Поясненіе. Тѣмъ, кто не привыкъ къ разсужденіямъ съ безконечнымъ, можетъ быть сдѣлано противъ 4-ой и 5-ой леммъ возраженіе, что хотя въ случаѣ безконечнаго n множители количествъ, выражающихъ отношенія $\frac{M}{L}$ и $\frac{M}{\Lambda}$, т. е. $nr \pm n \mp 1$, $nr \pm n \mp 2, \ldots$ и $ns \pm n \mp 1$, $ns \pm n \mp 2, \ldots$ имѣютъ то же значеніе, какъ $nr \pm n$ и $ns \pm n$, такъ какъ числа 1, 2, 3 .... исчезаютъ по сравненіи съ каждымъ изъ множителей; однако, возможно, что, собранныя вмѣстѣ и перемноженныя между собою (вслѣдствіе безконечнаго числа ихъ), эти числа безконечно уменьшатъ, т. е. сдѣлаютъ конечными, безконечныя степени отношеній $\frac{rs+s}{rs-r}$ или $\frac{rs+r}{rs-s}$. Этому сомнѣнію я не могу лучше удовлетворить, какъ показавъ теперь способъ на самомъ дѣлѣ найти конечное число n или конечную степень двучлена, въ которой сумма членовъ между предѣлами L и Λ имѣетъ къ суммѣ членовъ внѣ ихъ отношеніе, большее какого угодно большого даннаго отношенія, которое обозначу буквою c. Когда это будетъ показано, возраженіе необходимо падетъ.

Для этого я беру какое-либо отношеніе, большее единицы, но однако меньшее отношенія $\frac{rs+s}{rs-r}$ (для членовъ слѣва), напр., отношеніе $\frac{rs+s}{rs}$ или $\frac{r+1}{r}$, и умножаю его на самого себя столько разъ (m разъ), пока

произведеніе не будетъ равно или не превзойдетъ отношенія $c\,(s-1)$ къ 1; т. е. пока не будетъ

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^m \overline{\overline{>}}\ c\,(s-1).$$

Когда это должно случиться, можно быстро высчитать по логариѳмамъ; ибо, взявъ логариѳмы, получимъ

$$m \operatorname{Log}(r+1) - m \operatorname{Log} r \overline{\overline{>}} \operatorname{Log}[c\,(s-1)]$$

и по раздѣленіи сразу найдемъ

$$m \overline{\overline{>}} \frac{\operatorname{Log}[c\,(s-1)]}{\operatorname{Log}(r+1) - \operatorname{Log} r}.$$

Найдя это, я продолжаю такъ. Относительно ряда дробей или множителей

$$\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r},\quad \frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r},\quad \frac{nrs+ns-2s}{nrs-nr+3r},\ \ldots\quad \frac{nrs+s}{nrs},$$

черезъ умноженіе которыхъ, по леммѣ 4, получается отношеніе $\frac{M}{L}$, слѣдуетъ замѣтить, что отдѣльныя дроби меньше дроби $\frac{rs+s}{rs-r}$, однако, тѣмъ болѣе къ ней приближаются, чѣмъ большее берется n. Поэтому, какая-либо изъ нихъ когда-нибудь станетъ равной самому отноженію $\frac{rs+s}{rs} = \frac{r+1}{r}$. Въ виду этого слѣдуетъ посмотрѣть, какое надлежитъ взять n, чтобы дробь, порядокъ которой есть m, стала равной $\frac{r+1}{r}$. Но (что явствуетъ изъ закона составленія ряда) дробь порядка m такая

$$\frac{nrs+ns-ms+s}{nrs-ns+mr};$$

приравнивая ее $\frac{r+1}{r}$ получаемъ,

$$n = m + \frac{ms-s}{r+1}$$

и отсюда

$$nt = mt + \frac{mst-st}{r+1}.$$

Я утверждаю, что при такомъ показателѣ степени двучлена $r+s$ наибольшій членъ будетъ болѣе, чѣмъ въ $c\,(s-1)$ разъ превосходить

предѣлъ L. Ибо такъ какъ дробь порядка m при такомъ значеніи n будетъ равна $\frac{r+1}{r}$, а дробь $\frac{r+1}{r}$, умноженная на себя m разъ, т. е. $\frac{(r+1)^m}{r^m}$, равна или больше $c\,(s-1)$ (по положенію), то эта дробь (порядка m), умноженная на всѣ предыдущія, тѣмъ болѣе превзойдетъ $c\,(s-1)$, въ силу того, что всѣ предыдущія дроби больше $\frac{r+1}{r}$. Слѣдовательно, произведеніе послѣ умноженія на всѣ послѣдующія еще болѣе превзойдетъ $c\,(s-1)$, ибо всѣ послѣдующія дроби по крайней мѣрѣ больше единицы. Но произведеніе всѣхъ дробей выражаетъ отношеніе члена M къ L; поэтому совершенно достовѣрно, что членъ M превосходитъ L болѣе, чѣмъ въ $c\,(s-1)$ разъ. Но

$$\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R} \text{ и проч.},$$

какъ показано; отсюда слѣдуетъ, что второй членъ за M превзойдетъ второй членъ за L болѣе, чѣмъ въ $c\,(s-1)$ разъ, и т. д.—Поэтому, наконецъ, сумма всѣхъ членовъ между наибольшимъ M и предѣломъ L превзойдетъ болѣе, чѣмъ въ $c\,(s-1)$ разъ, сумму такого же числа наибольшихъ членовъ за этимъ предѣломъ, и болѣе, чѣмъ въ c разъ, эту сумму, взятую $s-1$ разъ. Слѣдовательно, тѣмъ очевиднѣе она превзойдетъ болѣе, чѣмъ въ c разъ сумму всѣхъ членовъ за предѣломъ L, число коихъ превосходитъ не болѣе, чѣмъ въ $s-1$ разъ число членовъ между M и L.— Относительно членовъ справа поступаю подобнымъ же образомъ. Беру отношеніе $\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs-s}$, полагаю $\frac{(s+1)^m}{s^m} \geqq c\,(r-1)$ и нахожу

$$m \geqq \frac{\operatorname{Log}[c\,(r-1)]}{\operatorname{Log}(s+1) - \operatorname{Log} s}.$$

Затѣмъ въ ряду дробей

$$\frac{nrs+nr}{nrs-ns+s},\quad \frac{nrs+nr-r}{nrs-ns+2s},\quad \frac{nrs+nr-2r}{nrs-ns+3s},\ \ldots\quad \frac{nrs+r}{nrs},$$

входящихъ въ отношеніе $\frac{M}{\Lambda}$, полагаю дробь порядка m, именно

$$\frac{nrs+nr-mr+r}{nrs-ns+ms},$$

равной

$$\frac{s+1}{s};$$

отсюда извлекаю

$$n = m + \frac{mr - r}{s + 1}$$

и потому

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s + 1}.$$

Послѣ чего подобнымъ же образомъ, какъ раньше, будетъ доказано, что въ двучленѣ $r + s$, возвышенномъ въ эту степень, наибольшій членъ M превзойдетъ предѣлъ Λ болѣе, чѣмъ въ $c\,(r - 1)$ разъ; и, слѣдовательно, также, что сумма членовъ между наибольшимъ M и предѣломъ L превзойдетъ сумму всѣхъ членовъ внѣ этого предѣла (число которыхъ превосходитъ число членовъ между M и Λ не болѣе чѣмъ въ $r - 1$ разъ) болѣе, чѣмъ въ c разъ. Итакъ, наконецъ, заключаемъ, что по возведеніи двучлена $r + s$ въ степень, показатель которой равенъ большему изъ двухъ чиселъ

$$mt + \frac{mst - st}{r + 1} \quad \text{и} \quad mt + \frac{mrt - rt}{s + 1}$$

сумма членовъ, заключенныхъ между предѣлами L и Λ болѣе, чѣмъ въ c разъ, превзойдетъ сумму всѣхъ остальныхъ, расположенныхъ по обѣ стороны отъ этихъ предѣловъ. Найдена, слѣдовательно, конечная степень, имѣющая желаемое свойство. Ч. т. д.

Главное предложеніе. Наконецъ слѣдуетъ само предложеніе, ради котораго сказано все предыдущее и котораго доказательство вытекаетъ изъ одного лишь примѣненія предварительныхъ леммъ къ настоящей цѣли. Чтобы избѣжать утомительнаго многословія, я назову случаи, когда какое-либо событіе появляется **плодовитыми** (благопріятными); а **безплодными** (неблагопріятными) тѣ, когда то же событіе не появляется. Равнымъ образомъ назову тѣ опыты **благопріятными**, когда обнаруживается одинъ изъ благопріятныхъ случаевъ, и **неблагопріятными**—тѣ, когда наблюдается одинъ изъ неблагопріятныхъ случаевъ. **Пусть число благопріятныхъ случаевъ относится къ числу неблагопріятныхъ точно или приближенно, какъ r къ s или къ числу всѣхъ случаевъ— какъ r къ $r + s$ или r къ t, каковое отношеніе заключается въ предѣлахъ $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$. Требуется доказать, что можно взять столько опытовъ, чтобы въ какое угодно данное число разъ (c разъ) было вѣроятнѣе, что число благопріятныхъ наблюденій попадетъ въ эти предѣлы, а не внѣ ихъ, т. е. что отношеніе числа благопріятныхъ наблюденій къ числу всѣхъ будетъ не болѣе, чѣмъ $\frac{r+1}{t}$, и не менѣе, чѣмъ $\frac{r-1}{t}$.**

Доказат. Положимъ число необходимыхъ наблюденій равнымъ nt; требуется опредѣлить, каково будетъ ожиданіе или вѣроятность, что всѣ они будутъ благопріятными, безъ исключенія, затѣмъ за исключеніемъ 1, 2, 3, 4 и т. д. неблагопріятныхъ. Такъ какъ при каждомъ наблюденіи имѣется, по положенію, t случаевъ, изъ нихъ r благопріятныхъ, и отдѣльные случаи одного наблюденія могутъ сочетаться съ отдѣльными случаями другого, послѣ чего опять сочетаться съ отдѣльными случаями 3-го, 4-го и т. д., то легко видѣть, что для этого годится правило, присоединенное къ примѣчаніямъ предлож. XIII первой части [1]) и его второе слѣдствіе, содержащее общую формулу, съ помощью коей находится вѣроятность отсутствія неблагопріятныхъ наблюденій

$$r^{nt} : t^{nt},$$

вѣроятность одного неблагопріятнаго наблюденія

$$\frac{nt}{1} r^{nt-1} s : t^{nt},$$

двухъ

$$\frac{nt(nt-1)}{1 \cdot 2} r^{nt-2} s^2 : t^{nt},$$

трехъ

$$\frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{nt-3} s^3 : t^{nt}, \text{— и т. д.}$$

Поэтому (по отбрасываніи общаго дѣлителя t^{nt}) ясно, что степени вѣроятностей или числа случаевъ, при которыхъ можетъ статься, что всѣ опыты благопріятны или всѣ, за исключеніемъ одного, двухъ, трехъ, четырехъ и т. д. неблагопріятныхъ, по порядку, выражаются черезъ

$$r^{nt}, \quad \frac{nt}{1} r^{nt-1} s, \quad \frac{nt(nt-1)}{1.2} r^{nt-2} s^2, \quad \frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1.2.3} r^{nt-3} s^3 \text{ и т. д.,}$$

т. е. какъ разъ тѣми самыми членами степени nt двучлена, которые только что изслѣдованы въ нашихъ леммахъ; откуда уже все остальное ясно. Именно, изъ природы ряда явствуетъ, что число случаевъ, которые съ ns неблагопріятными наблюденіями даютъ nr благопріятныхъ, есть самъ наибольшій членъ M, такъ какъ ему предшествуетъ ns членовъ, а за нимъ слѣдуетъ nr, по леммѣ 3. Равнымъ образомъ, ясно, что числа случаевъ, при которыхъ оказалось или $nr + n$ или $nr - n$ благопріятныхъ наблю-

[1]) Ссылка на первую часть «Ars Conjectandi», содержащую мемуаръ Гюйгенса объ азартныхъ играхъ съ дополненіями и примѣчаніями Я. Бернулли.

деній, при чемъ остальныя неблагопріятны, выражаются членами L и Λ, отстоящими на n членовъ по объ стороны отъ наибольшаго. Слѣдовательно, также ясно, что общее число случаевъ, при которыхъ оказывается не болѣе $nr+n$ и не менѣе $nr-n$ благопріятныхъ наблюденій, выражается суммою членовъ, заключенныхъ между предѣлами L и Λ; общее число остальныхъ случаевъ, при которыхъ оказывается или больше или меньше благопріятныхъ наблюденій, выражается суммой остальныхъ членовъ внѣ предѣловъ L и Λ. Такъ какъ степень двучлена можетъ быть взята столь большою, чтобы сумма членовъ, заключенныхъ между обоими предѣлами L и Λ, превосходила болѣе, чѣмъ въ c разъ, сумму всѣхъ остальныхъ, изъ этихъ предѣловъ выходящихъ, по леммамъ 4-й и 5-й, то, слѣдовательно можно взять столь большое число наблюденій, чтобы число случаевъ, при которыхъ отношеніе числа благопріятныхъ наблюденій къ числу всѣхъ оказывается не выходящимъ изъ предѣловъ $\frac{nr+n}{nt}$ и $\frac{nr-n}{nt}$ или $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$, превышало болѣе, чѣмъ въ c разъ, число остальныхъ случаевъ; т. е. сдѣлалось болѣе, чѣмъ въ c разъ, вѣроятнѣе, что отношеніе числа благопріятныхъ наблюденій къ числу всѣхъ заключается въ предѣлахъ $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$, а не внѣ этихъ предѣловъ. Что нужно было доказать.

Въ примѣненіи этого къ отдѣльнымъ численнымъ примѣрамъ достаточно ясно само собою, что чѣмъ большія берутся въ одномъ и томъ же отношеніи числа r, s и t, тѣмъ уже могутъ быть сдѣланы границы $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$ отношенія $\frac{r}{t}$,

На этомъ основаніи, если отношеніе числа случаевъ $\frac{r}{s}$, которое должно опредѣлить изъ наблюденій, есть, напр., полуторное, т. е. $\frac{3}{2}$, то за r и s я не беру 3 и 2, но 30 и 20 или 300 и 200 и проч. Достаточно положить $r=30$, $s=20$ и $t=50$, чтобы предѣлы оказались $\frac{r+1}{t}=\frac{31}{50}$ и $\frac{r-1}{t}=\frac{29}{50}$. Пусть, сверхъ того, положено $c=1000$. Тогда, по предписанному въ *разъясненіи* будетъ для членовъ

слѣва

$$m > \frac{\text{Log}\,[c\,(s-1)]}{\text{Log}\,(r+1)-\text{Log}\,r} = \frac{42787536}{142405} < 301$$

$$nt = mt + \frac{mst-st}{r+1} < 24728$$

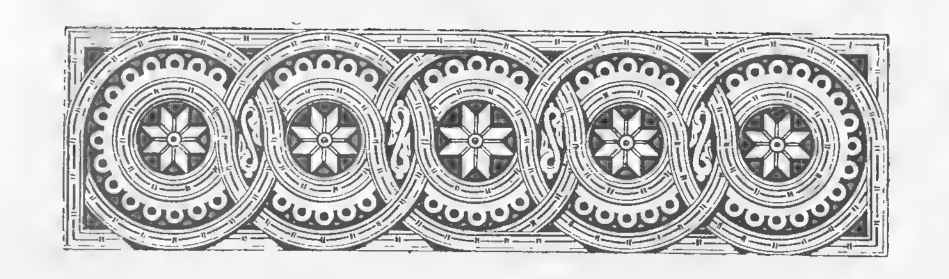
справа

$$m > \frac{\text{Log}\,[c(r-1)]}{\text{Log}\,(s+1) - \text{Log}\,(s)} = \frac{44623980}{211893} < 211$$

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s+1} = 25550.$$

Откуда, по доказанному тамъ, выводится заключеніе, что при 25550 опытахъ будетъ болѣе, чѣмъ въ тысячу разъ вѣроятнѣе, что отношеніе числа благопріятныхъ наблюденій къ числу всѣхъ будетъ заключено въ предѣлахъ $\frac{31}{51}$ и $\frac{29}{50}$, а не внѣ ихъ. И такимъ же образомъ, положивъ $c = 10000$ или $c = 100000$ и т. д., найдемъ, что то же будетъ болѣе, чѣмъ въ 10000 разъ, вѣроятнѣе, если будетъ сдѣлано 31258 опытовъ; и болѣе, чѣмъ въ 100000 разъ вѣроятнѣе, если будетъ взято 36966 опытовъ; и такъ далѣе до безконечности, прибавляя именно постоянно къ 25550 опытамъ 5708 другихъ. Откуда, наконецъ, вытекаетъ то удивительное, повидимому, слѣдствіе, что, если бы наблюденія надъ всѣми событіями продолжать всю вѣчность (при чемъ вѣроятность, наконецъ, перешла бы въ полную достовѣрность), то было бы замѣчено, что все въ мірѣ управляется точными отношеніями и постояннымъ закономъ измѣненій, такъ что даже въ вещахъ, въ высшей степени случайныхъ, мы принуждены были бы признать какъ бы нѣкоторую необходимость и, скажу я, рокъ. Не знаю, не это ли имѣлъ въ виду уже самъ Платонъ въ своемъ ученіи о возстановленіи всѣхъ вещей, согласно которому все по истеченіи несмѣтнаго числа вѣковъ возвратится въ прежнее состояніе.





Законы случайнаго и Математическая статистика

Подъ такимъ заголовкомъ въ журналѣ «Вѣстникъ Европы» (1892 годъ, Октябрь) напечаталъ статью профессоръ Казанскаго университета А. В. Васильевъ, нынѣ, по выборамъ, членъ Государственнаго Совѣта. Въ общедоступной и живой формѣ высокоученый профессоръ настолько наглядно рисуетъ всю важность изученія математической вѣроятности и перспективы ся будущаго въ приложеніяхъ къ различнымъ областямъ общественно-политическихъ наукъ, что считаемъ необходимымъ и сообразнымъ съ цѣлями нашихъ отрывковъ изъ теоріи вѣроятностей привести въ заключеніе обширное извлеченіе изъ этой статьи.

Можетъ показаться, что подобныя вычисленія (т. е. вычисленія математическихъ вѣроятностей) имѣютъ очень мало значенія. Какая польза знать, что вѣроятность паденія кости на грань, обозначенную цифрою 1, равна $^1/_6$, если мы знаемъ, что непремѣнно случится одно изъ двухъ событій: или она падетъ на эту грань, или нѣтъ. Какое отношеніе имѣютъ всѣ эти вычисленія—иногда съ большою затратою времени—вѣроятности къ дѣйствительности? Не замѣшана ли тутъ только дурная привычка математиковъ—всюду требовать чиселъ и всюду вводить ихъ?

Я постараюсь показать теперь, что вычисленія математической вѣроятности имѣютъ очень большое значеніе, и что математическая вѣроятност

можетъ и должна проявиться въ дѣйствительности. Въ самомъ дѣлѣ, при вычисленіи математической вѣроятности, напр., паденія кости, мы принимаемъ во вниманіе главную и постоянную причину, дѣйствующую при каждомъ паденіи кости —ея форму, но не принимаемъ во вниманіе всѣ остальныя причины, дѣйствующія при паденіи, причины, измѣняющіяся отъ одного паденія до другого. Мы должны, поэтому, а priori предвидѣть, что математическая вѣроятность должна проявиться при весьма большомъ числѣ испытаній, какъ выраженіе причины неизмѣнной среди множества перемѣнныхъ, дѣйствующихъ то въ ту, то въ другую сторону и потому взаимно уравновѣшивающихся. Но какъ именно проявится математическая вѣроятность при бóльшемъ числѣ испытаній—вотъ задача, которая въ теченіе двадцати лѣтъ подъ-рядъ была предметомъ неустанной работы мысли знаменитаго Якова Бернулли. Настойчивость великаго ума привела къ доказательству знаменитой теоремы, составляющей важнѣйшій результатъ теоріи вѣроятностей и носящей названіе *теоремы Якова Бернулли или закона большихъ чиселъ*.

На основаніи этой теоремы мы можемъ указать съ вѣроятностью, которую можемъ сдѣлать сколь угодно близкою къ единицѣ, тѣ предѣлы, между которыми должно заключаться число повтореній извѣстнаго случайнаго событія при бóльшемъ числѣ испытаній. Теорема говоритъ, что число повтореній событія не можетъ значительно отклониться отъ произведенія числа всѣхъ испытаній на вѣроятность событія, и указываетъ предѣлы отклоненія.

Для выясненія теоремы Бернулли необходимо привести по крайней мѣрѣ одинъ численный примѣръ. Мы возьмемъ самый простой примѣръ случайнаго событія: паденіе монеты на орелъ или на плату. Бросаемъ монету 100 разъ; по теоремѣ Бернулли весьма вѣроятно, что число паденій на орелъ, напр., будетъ заключаться между числами 33 и 67; отклоненіе дѣйствительнаго числа паденій отъ половины 100 не превышаетъ 17. Вѣроятность такого предсказанія такъ же велика, какъ вѣроятность предсказанія, что лицо, имѣющее одинъ билетъ выигрышнаго займа, не выиграетъ ничего въ предстоящій тиражъ. Предсказаніе можетъ не осуществиться: лицо можетъ выиграть, число паденій монеты на орелъ можетъ быть больше 67 и меньше 33. Но какъ ни одинъ здравомыслящій человѣкъ не станетъ измѣнять своей жизни или дѣлать какія-нибудь распоряженія и лишнія траты въ предвидѣніи выигрыша, такъ и мы можемъ считать почти несомнѣннымъ и основывать наши расчеты на убѣжденіи, что число паденій монеты на орелъ будетъ заключаться въ предѣлахъ 67 и 33.

Если мы увеличимъ число бросаній монеты въ 100 разъ, т. е. будемъ бросать ее 10 000 разъ, то опять съ тою же самою вѣроятностью—не вы-

играть, имѣя одинъ билетъ, мы можемъ утверждать, что число паденій на орелъ будетъ заключаться между предѣлами 5 175 и 4 825, т. е. отклоняться отъ половины 10 000 на 175.

Увеличимъ число бросаній еще въ 100 разъ, т. е. сдѣлаемъ милліонъ бросаній, и теорема говоритъ намъ, что при той же вѣроятности число будетъ заключаться между предѣлами 501 750 и 498 250, т. е. будетъ отклоняться отъ половины 10 000 не болѣе чѣмъ на 1 750. Наконецъ, при ста милліонахъ бросаній отклоненіе отъ половины будетъ не больше 17 500.



Проф. Александръ Васильевичъ Васильевъ.

Сопоставимъ теперь два ряда полученныхъ нами чиселъ. Числа бросаній монеты у насъ были: 100, 10 000, 1 000 000, 100 000 000, т. е. увеличивались послѣдовательно въ 100 разъ. Наибольшія же отклоненія, допустимыя съ вѣроятностью не выиграть въ тиражъ, были 17, 175, 1 750, 17 500, т. е. хотя и возростали, но возростали гораздо медленнѣе, увеличиваясь послѣдовательно въ 10 разъ. Это обстоятельство имѣетъ громадное значеніе. Ясно, что если мы будемъ разсматривать не абсолютныя цифры отклоненій, а отношенія къ общему числу испытаній, то мы будемъ получать все мѐньшія и мѐньшія дроби. Наибольшее отклоненіе при 100 испытаніяхъ не превышаетъ 17% общаго числа испытаній; при 10 000 оно

уже не превышетъ 1,7%; при 1 000 000 — 0,17%, и, наконецъ, при 100 000 000 — 0,017%.

По мѣрѣ увеличенія числа бросаній монеты отношеніе числа паденій монеты на орелъ къ общему числу паденій стремится къ дроби $^1/_2$, т. е. къ вѣроятности паденія на орелъ, а отношенія отклоненія числа паденій на орелъ отъ точной половины числа паденій къ общему числу паденій дѣлается все меньше и меньше и можетъ быть сдѣлано менѣе сколь угодно малой дроби.

Отсюда вытекаетъ такое замѣчательное слѣдствіе.

Если мы будемъ производить послѣдовательно два ряда бросаній монеты, заключающихъ каждый весьма большое число такихъ бросаній, то мы можемъ ожидать поразительной правильности. Отношенія числа паденій на орелъ къ общему числу паденій будутъ почти равны, и чѣмъ больше будутъ числа испытаній, тѣмъ ближе къ равенству будутъ эти отношенія.

Во всѣхъ случайныхъ явленіяхъ, происходящихъ отъ совокупности многихъ причинъ, какъ постоянныхъ, такъ и перемѣнныхъ, мы замѣчаемъ именно эту правильность, которая и составляетъ *законъ случайныхъ явленій*, a priori посредствомъ математическаго анализа доказываемый въ математической теоріи вѣроятностей.

Большія числа поправляютъ случай и наблюденія надъ большимъ числомъ явленій; массовыя наблюденія, какъ часто говорятъ, открываютъ намъ правильность тамъ, гдѣ съ перваго взгляда ея быть не можетъ.

Законъ большихъ чиселъ иногда иллюстрируютъ слѣдующимъ прекраснымъ сравненіемъ. Дождь, падая на горизонтальную полированную поверхность, смочитъ всѣ плиты равномѣрно. Каждая капля падаетъ самостоятельно отъ другихъ и случайно. Могло бы, казалось, случиться, что на ту или на другую изъ плитъ не попадаетъ ни одной капли, или очень мало; однако, этого никогда не случится. Такова сила большихъ чиселъ.

Экспериментальная провѣрка закона большихъ чиселъ занимала, между прочимъ, знаменитаго натуралиста Бюффона. Взявши монету, онъ бросалъ ее 4 040 разъ, и получилъ 2 048 разъ орелъ и 1992—плату. Бюффону же принадлежитъ осуществленіе квадратурнаго круга посредствомъ бросанія иголки на рядъ параллельныхъ линій. Въ выраженіе математической вѣроятности пересѣченія при паденіи иглою одной изъ параллельныхъ линій входитъ Архимедово число π (отношеніе окружности къ діаметру). При большомъ числѣ испытаній отношеніе числа повтореній случайнаго событія къ общему числу испытаній стремится къ вѣроятности. Слѣдовательно, стоитъ съ терпѣніемъ бросать большое число разъ иголку, отмѣчая сколько разъ она пересѣчется съ одною изъ параллельныхъ линій, и можно будетъ найти приближенное значеніе числа π.

Значеніе теоремы Бернулли не ограничивается тѣмъ, что она доказываетъ a priori необходимость правильности въ повтореніи случайныхъ событій. Она даетъ, кромѣ того, возможность провѣрять вѣрность нашихъ предположеній относительно вѣроятности случайнаго событія. Понятіе о математической вѣроятности всякаго случайнаго событія заключаетъ въ себѣ субъективный элементъ. Говоря, напр., объ опредѣленіи математической вѣроятности паденія кости на ту или другую грань, мы выразились: «мы вѣримъ, что при работѣ надъ костью были употреблены всѣ усилія, чтобы сдѣлать ее симметричною и однородною». Но какъ бы ни былъ искусенъ мастеръ, никогда нельзя утверждать, что кость сдѣлана дѣйствительно изъ абсолютно-однороднаго матеріала, и что ея центръ тяжести совпадаетъ съ геометрическимъ центромъ. Поэтому, считая вѣроятность паденія кости на ту или другую грань равною $^1/_6$, мы несомнѣнно дѣлаемъ ошибку и вычисляемъ только первое приближеніе. На дѣлѣ кость всегда нѣсколько не-симметрична и не-однородна, и вслѣдствіе этого имѣетъ большую наклонность падать на одну грань, чѣмъ на другую, что и проявляется на опытѣ, такъ какъ дѣйствительныя паденія кости, конечно, не могутъ зависѣть отъ нашей вѣры въ ея симметричность и однородность. Поэтому, если при 60 000 бросаніяхъ кости отклоненіе отъ одной шестой для извѣстной грани будетъ больше, чѣмъ то, которое допускается теоремою Бернулли, то мы имѣемъ право съ извѣстною вѣроятностью заключить, что наша математическая вѣроятность неточна, и замѣнить ее другою—*объективною вѣроятностью* или возможностью.

Въ случаѣ паденія кубической кости можно a priori вычислить хотя бы приближенную величину математической вѣроятности. Въ гораздо большемъ числѣ случаевъ такая вѣроятность не можетъ быть вычислена; но, производя опыты или наблюденія, мы по числу повтореній случайнаго событія можемъ вычислить его объективную вѣроятность. Вѣроятность для 18-ти-лѣтней дѣвушки выйти замужъ въ теченіе двухъ лѣтъ за 25-ти-лѣтняго не можетъ быть, конечно, вычислена a priori. Но если мы припомнимъ, что по теоремѣ Бернулли: «при весьма большомъ числѣ испытаній отношеніе числа повтореній къ числу испытаній стремится къ вѣроятности событія»,—то для опредѣленія искомой вѣроятности должны получить списокъ весьма большого числа 18-ти-лѣтнихъ дѣвушекъ и число тѣхъ изъ нихъ, которыя въ теченіе двухъ лѣтъ вышли замужъ за 25-ти-лѣтнихъ. Частное отъ раздѣленія этого послѣдняго числа на число всѣхъ 18-ти-лѣтнихъ дѣвушекъ и будетъ искомая вѣроятность. Данныя хорошо разработанной итальянской статистики отвѣчаютъ намъ на этотъ вопросъ, какъ и на многіе другіе. Онѣ говорятъ, что искомая вѣроятность равна 0,0099. Какую бы комбинацію возраста жениха и невѣсты ни взяли, по даннымъ статистики можно опре-

дѣлять соотвѣтствующую вѣроятность. Подобнымъ же образомъ могутъ быть опредѣляемы объективныя вѣроятности и другихъ событій.

Возьмемъ, напримѣръ, нѣсколько страницъ какого-нибудь писателя, сосчитаемъ число всѣхъ буквъ и число встрѣтившихся *а*. Отношеніе между числомъ встрѣтившихся буквъ *а* и общимъ числомъ всѣхъ будетъ объективная вѣроятность того, что первая попавшаяся случайно на страницѣ буква будетъ именно *а*. Возьмемъ другія страницы того же или другого русскаго писателя, и на основаніи закона большихъ чиселъ мы найдемъ почти тѣ же дроби для объективной вѣроятности появленія той же буквы. И литературное произведеніе, и газетная статья, и научный трактатъ, если они написаны на одномъ и томъ же языкѣ, дадутъ при большомъ отрывкѣ одинъ и тотъ же результатъ. Фонетическіе законы языка остаются одинаковыми для различныхъ авторовъ, и потому объективныя вѣроятности звуковъ въ одномъ и томъ же языкѣ будутъ имѣть одинаковыя значенія, изъ какого отрывка онѣ бы ни выводились. Но для другого языка объективныя вѣроятности тѣхъ же звуковъ получать иное значеніе. Разработанная на этихъ началахъ фонетическая статистика, примѣненная строго-научно, можетъ, охарактеризовавъ каждый данный языкъ системою чиселъ, дать прекрасный методъ для сравненія его съ другими языками. Первыя попытки въ этомъ направленіи были произведены въ сороковыхъ годахъ Ферстиманномъ надъ языками греческимъ, латинскимъ, готскимъ и санскритскимъ, но съ тѣхъ поръ на этотъ предметъ филологи мало обращали вниманія.

Теорія вѣроятностей родилась у игорнаго стола, и въ теченіе довольно значительнаго времени ея предметомъ продолжали быть азартныя игры: орлянка, игра въ кости. различные виды игры въ карты. Но великіе ученые XVII и XVIII вѣковъ, разрабатывавшіе эти приложенія теоріи вѣроятностей, видѣли въ комбинаціяхъ, представляемыхъ азартными играми. лишь предлоги для усовершенствованія методовъ науки. Еще Паскаль понималъ, что вѣтвь знанія, которой онъ и Ферма полагали начало, имѣетъ многоразличныя примѣненія къ всевозможнымъ случайнымъ явленіямъ, и въ теоріи вѣроятностей—геометрію случая. Скоро, дѣйствительно, передъ теоріею вѣроятностей открылось обширное поле самыхъ важныхъ приложеній какъ въ общественныхъ, такъ и въ научныхъ вопросахъ.

Однимъ изъ первыхъ приложеній явилось приложеніе теоріи вѣроятностей къ рѣшенію вопроса, который въ XVIII вѣкѣ, столь богатомъ войнами, могъ интересовать не одну жену офицера или солдата, не отличавшуюся вѣрностью классической Пенелопы. Это вопросъ объ опредѣленіи срока, послѣ котораго безъ вѣсти пропавшій мужъ могъ считаться мерт-

вымъ, а слѣдовательно его жена могла, не подвергая себя извѣстному Гамлетовскому упреку, наложить на себя новыя брачныя узы.

За этимъ первымъ приложеніемъ послѣдовали многія другія приложенія: къ страхованію жизни, отъ огня и т. п. Явились, какъ всегда, и увлеченія: теорія вѣроятностей прилагалась, напр., къ опредѣленію вѣроятностей судейскихъ приговоровъ, рѣшеній законодательныхъ собраній и т. п.

Въ настоящее время все болѣе и болѣе выясняется то громадное значеніе, которое въ области научныхъ вопросовъ принадлежитъ основанному на теоріи вѣроятностей статистическому методу — а въ практической жизни—основанному на теоріи вѣроятностей страхованію отъ бѣдствій, происходящихъ отъ случайныхъ событій.

На теоріи вѣроятностей основывается статистическій методъ. Его техника, руководимая теоріей вѣроятностью, выработывается постепенно въ особую вѣтвь знанія, въ особую науку—математическую статистику. Науку эту можно разсматривать какъ вѣтвь логики, изучающей всѣ методы, которыми человѣческій умъ пользуется для пріобрѣтенія новыхъ истинъ.

Такъ какъ всѣ выводы теоріи вѣроятностей основываются на законѣ большихъ чиселъ и не имѣютъ никакого значенія, если будутъ относимы къ небольшому числу испытаній, то и статистическій методъ нуждается въ массовыхъ наблюденіяхъ для правильности своихъ выводовъ. Только большія числа устанавливаютъ извѣстную правильность въ повтореніи случайныхъ событій; только имѣя въ статистическихъ таблицахъ данныя относительно большого числа однородныхъ случайныхъ событій, мы можемъ выводить объективныя вѣроятности ихъ и, пользуясь формулами теоріи вѣроятностей, при измѣненіи отношенія между числомъ повтореній события и общимъ числомъ испытаній,—судить о томъ, измѣнились ли главныя причины, проявляющіяся въ событіи, или же замѣченное измѣненіе упомянутаго отношенія не выходитъ изъ предѣловъ измѣненія, допустимаго самимъ характеромъ случайнаго событія, какъ зависящаго не только отъ главныхъ постоянныхъ причинъ, но и отъ постоянно мѣняющихся, случайныхъ. Можетъ ли, другими словами, разсматриваемое случайное событіе быть уподоблено типическому случайному событію—выходу, напр., шаровъ бѣлаго цвѣта изъ урны, заключающей въ себѣ неизмѣняющееся въ теченіе всѣхъ испытаній число шаровъ разнаго цвѣта?

Сравненіе статистическихъ рядовъ въ томъ видѣ, въ какомъ они даются наблюденіями, съ такимъ типическимъ случайнымъ событіемъ, съ постоянною объективною вѣроятностью, приводитъ къ интересной классификаціи статистическихъ рядовъ, идея которой пришла почти одновременно, въ семидесятыхъ годахъ, двумъ ученымъ — германскому политикоэконому

Лексису и французскому математику Дормуа. Примѣняя математическій критерій, вытекающій изъ формулъ теоріи вѣроятностей, къ различнымъ статистическимъ рядамъ, они нашли, что всѣ статистическіе ряды могутъ быть отнесены къ тремъ различнымъ категоріямъ.

Въ первую категорію входятъ всѣ тѣ ряды, въ которыхъ отклоненія слѣдуютъ тому же закону, которому они слѣдуютъ въ типическихъ случайныхъ явленіяхъ съ постоянною объективною вѣроятностью. Такіе статистическіе ряды Лексисъ называлъ обладающими нормальною дисперсіею (разсѣяніемъ). По Дормуа, для нихъ извѣстное отношеніе, которое онъ называетъ коэффиціентомъ расходимости, равно 1.

Въ рядахъ второй категоріи, напротивъ, отклоненія значительно больше, какъ будто бы въ этихъ явленіяхъ дѣйствовала какая-то возмущающая сила, постоянно измѣняющая объективную вѣроятность явленія; такія числа получались бы при выходѣ шаровъ изъ урны, если бы въ урну время отъ времени подсыпались то бѣлые, то черные шары. Такіе ряды называются рядами съ сверхнормальною дисперсіею; коэффиціентъ расходимости для нихъ больше единицы, и тѣмъ онъ больше, тѣмъ сильнѣе вліяніе пертурбирующихъ причинъ, т. е. измѣняющихъ объективную вѣроятность явленія.

Наконецъ, въ массовыхъ явленіяхъ третьей категоріи дѣйствуетъ регулирующая сила, направляющая ихъ къ бо̀льшему постоянству, сглаживающая и уменьшающая ихъ отклоненія. Такіе ряды называются рядами съ дисперсіею ниже нормальной, и коэффиціентъ расходимости для нихъ меньше единицы.

Особенно интересный примѣръ рядовъ съ нормальною дисперсіею представляетъ рядъ, составленный изъ отношеній между числомъ рожденій младенцевъ мужского пола и числомъ рожденій младенцевъ женскаго пола.

Отношеніе это отличается замѣчательнымъ постоянствомъ по годамъ, по временамъ года, по странамъ, и можетъ быть приблизительно выражено отношеніемъ между числами 1063 : 1000.

Поразительное постоянство этого отношенія опровергаетъ различныя теоріи, объяснявшія полъ рождающагося младенца то тою или другою разностью въ годахъ отца и матери (теорія Hofacker—Sadler'a), то различіемъ питанія организма матери во время беременности. Дѣйствительно, разность между годами брачущихся варіируетъ по странамъ довольно рѣзко и представляетъ рядъ съ сверхнормальною дисперсіею; питаніе женщинъ варіируетъ въ одной и той же странѣ по годамъ. Отношеніе же между числами рожденій младенцевъ мужского пола и женскаго остается поразительно постояннымъ.

Интересно, что такое же постоянство обнаруживается, какъ показали изслѣдованія ботаника Гейера надъ коноплею и надъ Mercurialis annua,

также и у двудомныхъ растеній. Гейеръ, независимо отъ Лексиса, пришелъ къ выводу, что это постоянство всего лучше объясняется тѣмъ, что уже сѣмянныя клѣтки различаются по ихъ поламъ; замѣчательно, что у Mercurialis annua тѣ клѣтки изъ которыхъ произойдутъ мужскіе организмы, находятся почти въ томъ же отношеніи къ клѣткамъ, изъ которыхъ произойдутъ женскіе, какъ и у людей, въ отношеніи 1059 : 1000. У конопли это отношеніе обратное: число сѣмянныхъ женскихъ клѣтокъ превышаетъ число мужскихъ въ отношеніи 1150 : 1000.

Рядами съ нормальною дисперсіею является также большинство рядовъ криминальной статистики. Отношеніе числа осужденныхъ французскими Cours d'assises къ населенію отличается весьма большимъ постоянствомъ: коэффиціентъ расходимости равенъ только 6. Такъ же малы коэффиціенты расходимости для отношенія числа приговоренныхъ женщинъ къ общему числу приговоренныхъ (2,3), для отношенія холостыхъ преступниковъ къ общему числу преступниковъ (3), для отношенія преступниковъ въ возрастѣ отъ 21 до 30 лѣтъ къ общему числу преступниковъ (1,75), для отношенія числа безграмотныхъ преступниковъ къ общему числу ихъ (5).

Нѣсколько больше уже коэффиціентъ расходимости для отношенія числа самоубійствъ къ населенію, такъ какъ и абсолютное, и относительное число самоубійствъ увеличивается.

Большое число примѣровъ рядовъ съ сверхнормальною дисперсіею представляетъ намъ демографія, или статистика народонаселенія. Для отношенія числа рожденій къ населенію коэффиціентъ расходимости равенъ 32; для отношенія числа браковъ къ населенію 25; для отношенія числа смертей къ народонаселенію 86. Большая величина послѣдняго коэффиціента объясняется эпидеміями, войнами, неурожаями.

Сверхнормальную дисперсію представляетъ также отношеніе числа выздоравливающихъ отъ эпидемій къ общему числу заболѣвшихъ. Обстоятельство это находится, очевидно, въ связи съ бо̀льшею или мѐньшею силою эпидеміи. Напротивъ, въ случаѣ тѣхъ болѣзней, гдѣ выздоровленіе зависитъ преимущественно отъ ухода, мы должны получить ряды съ нормальною дисперсіею, и Физмеръ дѣйствительно получилъ для процента выздоравливающихъ отъ пневмоніи рядъ съ нормальною дисперсіею.

Если эпидеміи, войны, неурожаи—играютъ роль причины, возмущающей правильное дѣйствіе закона большихъ чиселъ, какъ бы подбрасывающей черные шары въ урну, то законодательство, напротивъ, играетъ часто роль причины регулирующей, и потому примѣры рядовъ съ ниже-нормальною дисперсіею мы встрѣчаемъ преимущественно въ тѣхъ статистическихъ рядахъ, на которые оказываетъ вліяніе законодательство.

Статистическій методъ, какъ видно изъ предыдущихъ примѣровъ, можетъ быть прилагаемъ къ различнымъ отраслямъ знанія. Но какъ ни разнообразны могутъ быть приложенія статистическаго метода, есть одна область явленій, гдѣ статистическій методъ является незамѣнимымъ, единственнымъ методомъ, дающимъ точныя численныя данныя. Это—область общественныхъ явленій.

Метеорологія можетъ еще мечтать объ апріорномъ математическомъ рѣшеніи задачи о направленіи вѣтровъ и океаническихъ теченій на земномъ шарѣ, сплошь покрытомъ водяною оболочкою и окруженномъ атмосферою. Но область запутанныхъ явленій общественной жизни настолько сложна, что здѣсь приложеніе математики представляется намъ трудно осуществимымъ. Увлеченіе математическимъ методомъ составляло характерную черту XVIII вѣка, пораженнаго созданіемъ небесной механики, и Кондорсе мечталъ «освѣтить политическія и нравственныя науки свѣточемъ алгебры». Но еще тогда это увлеченіе было осмѣяно аббатомъ Галіани въ одномъ изъ остроумнѣйшихъ сочиненій XVIII вѣка: «Бесѣды о торговлѣ зерномъ». Теперь это увлеченіе прошло. Только въ политической экономіи мы видимъ попытки приложить математическій методъ къ тѣмъ спеціальнымъ частямъ ея, которыя трактуютъ объ обмѣнѣ и о денежномъ обращеніи. Громадная сложность явленій общественной жизни дѣлаетъ трудно примѣнимымъ въ изученіи этихъ явленій дедуктивный математическій методъ; зато невозможность опыта дѣлаетъ особенно драгоцѣннымъ статистическій методъ, а вмѣстѣ съ статистическимъ методомъ дѣлается необходимою и отрасль математики—математическая статистика, какъ строгій стражъ точности полученныхъ результатовъ.

Совокупность результатовъ, полученныхъ для науки объ обществѣ съ помощью статистическаго метода или метода массовыхъ наблюденій, составляетъ особую вѣтвь знанія, которую обыкновенно называютъ статистикою, но было бы правильнѣе назвать ее соціальною статистикою, подобно тому, какъ уже существуетъ статистика медицинская и можетъ существовать статистика фонетическая.

Изъ сказаннаго выше о цѣли массовыхъ наблюденій всякаго рода видно, что конечная цѣль соціальной статистики должна заключаться въ томъ, чтобы изъ наблюденій надъ массами однородныхъ общественныхъ явленій, во-первыхъ, вывести числовыя данныя, характеризующія частоту появленія извѣстнаго соціальнаго явленія (брака въ томъ или другомъ возрастѣ, самоубійства, кражи со взломомъ); во-вторыхъ—изучить измѣняемость этихъ числовыхъ данныхъ. Послѣдняя и самая важная цѣль статистики состоитъ въ томъ, чтобы проникнуть насколько возможно въ причинную связь между различными явленіями общественной жизни. Ста-

тистика можетъ сдѣлать это. группируя извѣстнымъ образомъ свои данныя, изолируя, благодаря такой группировкѣ, одну изъ причинъ и выставляя ея значеніе для разсматриваемаго соціальнаго явленія. Такъ, для того, чтобы выяснить зависимость самоубійствъ отъ возраста, она должна распредѣлить данныя относительно самоубійствъ по возрастамъ.

Говоря языкомъ математической теоріи вѣроятностей, мы должны сказать, что цѣль соціальной статистики должна состоятъ въ томъ, чтобы охарактеризовать общественный организмъ возможно большимъ числомъ объективныхъ вѣроятностей, и путемъ сравненія различныхъ соціальныхъ организмовъ вывести числовыя связи, существующія между объективными вѣроятностями различныхъ явленій. Такъ, въ физикѣ каждое простое или сложное тѣло характеризуется системою физическихъ постоянныхъ (атомный и удѣльный вѣсъ, показатель преломленія и т. д.). Чѣмъ больше мы знаемъ такихъ физическихъ постоянныхъ для физическаго тѣла, тѣмъ ближе мы знаемъ самое тѣло; чѣмъ больше числовыхъ связей (функціональныхъ зависимостей) нами найдено, тѣмъ больше мы знаемъ физическихъ законовъ.

Не съ одними постоянными отношеніями встрѣчается соціальная статистика. На всякомъ шагу въ ней замѣчаются и такіе ряды, которые Лексисъ называетъ эволюторными; примѣръ такихъ рядовъ представитъ, напр., во всякой прогрессирующей странѣ рядъ, составленный изъ годовыхъ цифръ лицъ, получающихъ образованіе, и т. п. Во всѣхъ этихъ рядахъ замѣчается уже не постоянство, а тенденція измѣняться въ томъ или другомъ направленіи.

Но и тѣ ряды, которые представляютъ поразительное постоянство, заставившее Кетле говоритъ объ опредѣленномъ бюджетѣ преступниковъ, который платитъ всякое общество,—на дѣлѣ также подвергаются «вѣковымъ неравенствамъ». Фаталистическое воззрѣніе Кетле и прочихъ послѣдователей «математической школы» въ статистикѣ уступаетъ мѣсто другому воззрѣнію, которое разсматриваетъ всякую вычисляемую статистикою объективную вѣроятность, какъ продуктъ всего общественнаго строя, измѣняющійся вмѣстѣ съ измѣненіемъ самаго строя.

Мѣсто соціальной статистики въ ряду другихъ общественныхъ наукъ легко опредѣлится, если мы будемъ исходить изъ предложеннаго О. Контомъ раздѣленія соціологіи—науки объ обществѣ—на абстрактную и конкретную.

Абстрактная наука объ обществѣ, изучающая законы объ общественности вообще, законы, которые были бы получены путемъ отвлеченія отъ конкретныхъ общественныхъ организмовъ — еще не существуетъ. Всѣ существующія теперь общественныя науки (наука о хозяйственныхъ отно-

шеніяхъ или политическая экономія, исторія прагматическая, исторія культуры, исторія права) суть части конкретной соціологіи потому, что всѣ изучаютъ существующія или существовавшія общества и государства. Соціальная статистика составляетъ часть той же конкретной соціологіи; но между тѣмъ какъ другія науки отличаются между собою по предметамъ изслѣдованія (право, хозяйство, литература), соціальная статистика отличается отъ нихъ по методу. По предмету изслѣдованій она такъ же обща, какъ сама наука въ обществѣ, такъ какъ въ кругъ ея изслѣдованій одинаково входятъ и важнѣйшія явленія физіологической жизни отдѣльнаго человѣка, и явленія хозяйственной жизни, и, наконецъ, тѣ явленія, которыя обусловливаются разумно-нравственною стороною человѣческой природы. Этимъ различнымъ сторонамъ человѣческой дѣятельности соотвѣтствуетъ раздѣленіе статистики на три главные отдѣла: 1) демографія, или статистика народонаселенія (наиболѣе разработанная и наиболѣе пользующаяся помощью математическаго анализа часть статистики); 2) экономическая статистика, и 3) статистика моральная или культурная, изучающая повторяемость преступленій, самоубійствъ, дѣятельность школы, благотворительности, поскольку она проявляется въ числовыхъ данныхъ.

Совпадая по своему предмету съ другими частями общественной науки, соціальная статистика отличается отъ нихъ по методу. Мы видѣли, что этотъ методъ заключается въ томъ, чтобы изъ наблюденій надъ массами явленій вывести извѣстныя числовыя постоянныя, характеризующія данный соціальный организмъ, и, пользуясь вспомогательными формулами теоріи вѣроятностей, отличить при измѣненіи этихъ числовыхъ постоянныхъ тѣ, которыя происходятъ отъ причинъ случайныхъ, отъ тѣхъ, которыя указываютъ на измѣненія въ строѣ самого организма. Въ этомъ числовомъ методѣ — преимущество и сила статистики сравнительно съ другими частями общественной науки, и поэтому она можетъ развиваться, только опираясь постоянно на указанія науки о числахъ — чистой математики. Только опираясь на указанія теоріи вѣроятностей и основанной на ней математической статистики, соціальная статистика можетъ не дѣлать тѣхъ ошибокъ, которыхъ не лишена ея исторія. Статистика и должны научиться у астрономовъ и физиковъ, какимъ образомъ, только постоянно прибѣгая къ помощи чистой математики, можно открывать вѣковыя неравенства въ отношеніяхъ, кажущихся постоянными, и отъ эмпирическихъ законовъ, соотвѣтствующихъ законамъ Кеплера, перейти къ истиннымъ законамъ природы, типомъ которыхъ является великій законъ всемірнаго тяготѣнія.

Но какъ ни велика, какъ ни важна роль статистики, какъ части общественной науки, она неизбѣжно нуждается въ дополненіи. Въ самомъ дѣлѣ, что дастъ намъ, напримѣръ, такъ называемая моральная статистика? Она указываетъ намъ, напримѣръ, число самоубійствъ, измѣненіе чиселъ по временамъ года, по родамъ самоубійства, наводитъ на интересныя и важныя мысли. Но для психологіи самоубійства, для выясненія той связи, которая существуетъ между жизнью общества и фатальнымъ поступкомъ самоубійцы, она не даетъ почти ничего. Она не вводитъ въ психологическій міръ самоубійцы, такъ какъ принуждена соединять всѣ самоубійства, независимо отъ психологическихъ мотивовъ, въ одну цифру ихъ и для нея по необходимости—цѣломудренный, одаренный нѣжною чувствительностью Вертеръ, лишающій себя жизни изъ любви къ Шарлоттѣ, и пресыщенный страстями и наслажденіями Ролла фигурируютъ въ статистической таблицѣ какъ однородныя единицы.

Вотъ почему статистика необходимо нуждается въ дополненіи: мы только тогда поймемъ извѣстное явленіе жизни человѣка, когда познакомимся не только съ его психологіею, но и съ психологіею и жизнью той среды, въ которой онъ жилъ и развивался. «Человѣческіе документы»—въ родѣ дневника Башкирцевой—являются лишь въ видѣ исключенія. Ихъ можетъ замѣнять и дѣйствительно замѣняетъ психологическій и соціологическій романъ новѣйшаго времени. Эту мысль съ особеннымъ увлеченіемъ развивалъ одинъ изъ представителей современнаго реалистическаго романа—Эмиль Зола.

«Мы указываемъ,—пишетъ онъ въ своемъ: «Le roman expérimental», отъ лица всѣхъ реалистовъ,—механизмъ полезнаго и вреднаго; мы раскрываемъ детерминизмъ человѣческихъ и общественныхъ явленій, чтобы впослѣдствіи можно было овладѣть ими и направлять эти явленія». Романистъ сравнивается съ естествоиспытателемъ, производящимъ опыты.

Конечно, есть доля увлеченія въ этихъ мысляхъ автора «Жерминаля» и «Денегъ». Прекрасную критику этихъ мыслей даетъ Гюйо въ недавно переведенномъ на русскій языкъ сочиненіи: «Искусство съ соціологической точки зрѣнія». Онъ указываетъ совершенно справедливо на то, что опытъ романиста только съ большою натяжкою можно уподобить опыту естествоиспытателя; опытъ послѣняго производится въ природѣ, опытъ перваго—въ мозгу романиста. Но каковы бы ни были увлеченія Зола, нельзя не признать извѣстной доли правды въ его взглядахъ, а слѣдовательно высокаго общественнаго и въ извѣстной степени научнаго значенія современнаго романа.

Основной принципъ всякаго научнаго мышленія, по которому всякое явленіе должно вполнѣ опредѣляться его причинами, оказываетъ и на ли-

тературу все большее и большее вліяніе. Романъ во вкусѣ Дюма, романъ основанный на эффектахъ и случайностяхъ, въ которомъ развязки являются какъ Deus ex machina, уступилъ мѣсто роману, въ которомъ всякій поступокъ дѣйствующихъ въ романѣ лицъ является слѣдствіемъ опредѣляющихъ его причинъ: наслѣдственности, воспитанія, вліянія среды физической или соціальной.

Составляя необходимое дополненіе статистики, романъ не является въ то же время ея антитезою. Онъ имѣетъ со статистикою многія общія черты, которыя съ своей стороны обнаруживаютъ важное значеніе романа.

Подобно тому какъ статистика, классифицируя извѣстнымъ образомъ собранные ею факты, преслѣдуетъ цѣль исключить вліяніе нѣкоторыхъ изъ причинъ, производящихъ извѣстное явленіе соціальнаго міра, и изучить такимъ образомъ только вліяніе остальныхъ,—и романъ всегда преслѣдуетъ цѣль изолированія одной изъ причинъ. Подобно тому какъ «сложные портреты» Гальтона (Statistics by incomparicon) доставляютъ общія типическія черты лица извѣстной расы или профессіи, романистъ всегда рисуетъ вамъ типъ. Черты Плюшкина или Павла Ивановича Чичикова, разсѣянныя въ разныхъ индивидуумахъ, сконденсированы великимъ основателемъ русскаго реальнаго романа въ типическіе, ярко возникающіе передъ нами образы. Притомъ романъ ставитъ типъ или характеръ въ обстановку, гдѣ его основныя черты могутъ развиться и обнаруживаться въ той степени, въ которой онѣ рѣдко развиваются въ дѣйствительной жизни, гдѣ случайности постоянно нарушаютъ логику событій. «Дѣйствительная жизнь и конкретная исторія,—говоритъ Гюйо,—наполнены недоконченными мыслями, разбитою волею, сломанными характерами, неполными и изувѣченными человѣческими существами. Въ романѣ сокращается до крайней необходимости доля случайныхъ происшествій, и въ чертахъ, рѣзко дѣйствующихъ на нашъ умъ, обнаруживается связь извѣстной причины съ дѣйствіемъ». Въ «Ученикѣ» П. Бурже читатель ясно понимаетъ, какъ темпераментъ, воспитаніе и плохо понятая философія могли привести героя къ постыдной мысли экспериментировать надъ живымъ существомъ; читая объ Іудушкѣ Головлевѣ у Салтыкова, — понимаешь, что такой типъ могъ вырасти только на почвѣ крѣпостной Россіи.

«Романъ,—говоритъ Гюйо, — есть упрощенное и поразительное изложеніе соціологическихъ законовъ».

Въ какихъ бы дополненіяхъ ни нуждалась, однако, статистика, во всякомъ случаѣ развитіе ея представляетъ громадную важность для развитія соціальной науки вообще. Она открываетъ для общестненной науки новый неисчерпаемый источникъ истинъ, позволяетъ ей замѣнить абстрактныя метафизическія понятія, такъ долго господствовавшія въ обществен-

ной наукѣ, живою подою точнаго математическаго знанія и даетъ возможность при свѣтѣ факела математическаго анализа разыскивать причинную связь между общественными явленіями.

Новѣйшіе успѣхи математической статистики косвеннымъ образомъ начинаютъ проявлять вліяніе на выработку новыхъ методовъ изслѣдованій въ политической экономіи. До сихъ поръ еще идетъ въ этой наукѣ оживленный споръ о томъ, какого метода она должна держаться, споръ о томъ, есть ли политическая экономія—наука дедуктивная, какъ учитъ классическая школа, или индуктивная, какъ смотритъ школа историческая. Лексисъ, которому мы обязаны изслѣдованіями о дисперсіи статистическихъ рядовъ, вноситъ и въ споръ о методахъ политической экономіи новыя и важныя мысли, показывая въ своемъ классическомъ сочиненіи: «О французскихъ ввозныхъ и вывозныхъ преміяхъ»,—какъ можно соединять дедукцію съ индукціею, и постояннымъ пользованіемъ параллельно идущими статистическими рядами достигаетъ интересныхъ выводовъ въ изученіи явленій хозяйственной жизни.

Данныя, собираемыя и обрабатываемыя соціальною статистикою, имѣютъ не только важное теоретическое значеніе,—не менѣе важно и ихъ практическое значеніе.

Ни одно мѣропріятіе, касающееся той или другой изъ сторонъ общественной жизни, не можетъ считаться достаточно обоснованнымъ, если оно не опирается на хорошо собранныя и серьезно разработанныя статистическія данныя. Съ другой стороны, безъ статистическихъ данныхъ невозможно было бы и то широкое развитіе разнообразныхъ страховыхъ предпріятій, которое мы видимъ въ Западной Европѣ и Сѣверной Америкѣ, гдѣ образовался особый классъ техниковъ вычислителей (актуаріевъ), спеціальность которыхъ состоитъ въ обработкѣ статистическихъ данныхъ и въ вычисленіяхъ, необходимыхъ для правильнаго веденія страховыхъ операцій.

Критическія обстоятельства только-что пережитаго нами тяжелаго года [1]) должны, по нашему мнѣнію, обратить вниманіе всѣхъ интересующихся экономическими вопросами на одну изъ формъ страхованія—страхованіе посѣвовъ отъ неурожая. Несомнѣнно, что первенствующее значеніе въ дѣлѣ борьбы съ бѣдствіями, подобными постигшему Россію въ 1891 г., имѣютъ экономическія мѣры, поднятіе техники сельскаго хозяйства, изученіе климатическихъ и почвенныхъ условій и т. п. Но всѣ эти задачи требуютъ для своего разрѣшенія болѣе или менѣе продолжительное время. Неотложною представляется задача о лучшей организаціи продовольственнаго дѣла.

---

[1]) Рѣчь идетъ о голодѣ 1891 года.

Недостатки существующей у насъ организаціи этого дѣла давно уже указывались всѣми, кому приходилось по той или другой причинѣ всматриваться ближе въ его веденіе на мѣстахъ, въ провинціи. Въ настоящее время они сознаны уже всѣми, и здѣсь не мѣсто перечислять ихъ.

При предстоящей реорганизаціи этого дѣла нельзя будетъ, конечно, обойти и вопросъ о примѣненіи къ ней въ той или другой степени идеи страхованія, примѣненіе которой въ борьбѣ съ другими бѣдствіями принесло столько пользы. Поэтому, несмотря на всѣ трудности, исключительно принадлежащія этой формѣ страхованія (опредѣленіе нормы страхуемаго урожая въ размѣрѣ, не дѣлающемъ выгоднымъ пониженіе производительности труда; опредѣленіе величины страховой преміи въ размѣрѣ, который, обезпечивая достаточное количество пудовъ на десятину, въ то же время не обременялъ бы земледѣльца новыми тяжелыми платежами; устройство агентуры, вполнѣ подготовленной къ трудному дѣлу оцѣнки убытковъ отъ неурожая, и т. п.),—вопросъ о страхованіи посѣвовъ, несомнѣнно, заслуживаетъ серьезной научной разработки. Начало такой разработкѣ уже положено въ трудѣ, изданномъ въ Казани Л. І. Грассомъ: «Страхованіе сельскохозяйственныхъ посѣвовъ отъ неурожая».

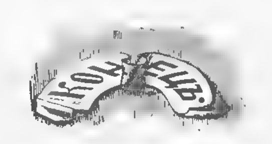
Идея о страхованіи посѣвовъ получила уже практическое примѣненіе въ Японіи; она разрабатывается во Франціи. Въ Россіи, странѣ земледѣльческой, на идею страхованія должно быть обращено такое же серьезное вниманіе, какое выпало въ странахъ промышленнаго типа на вопросъ объ обезпеченіи промышленнаго рабочаго путемъ страхованія отъ бѣдствій, сопряженныхъ съ болѣзнью, увѣчьемъ и т. п. Изданію всѣмъ извѣстныхъ германскихъ законовъ, устанавливающихъ обязательное государственное страхованіе промышленнаго рабочаго, предшествовали замѣчательныя изслѣдованія по математической статистикѣ Цейнера, Кнаппа, Цилльмера и др. Для насъ столь же необходимою является научная разработка вопросовъ, связанныхъ съ сельскимъ хозяйствомъ, и въ частности — какъ статистики урожаевъ, такъ и техники страхованія посѣвовъ.

Мы видѣли выше, какъ въ первыхъ фазисахъ развитія человѣческой мысли, еще въ туманной дали халдейской культуры, человѣкъ обращался къ числамъ— и въ ихъ таинственныхъ для него свойствахъ искалъ возможности проникнуть въ тайны будущаго для того, чтобы бороться съ слѣпымъ случаемъ. Фантастическія бредни халдейскихъ мудрецовъ и пиѳагорейцевъ не достигли, конечно, цѣли.

Прошли тысячелѣтія. И теперь съ каждымъ днемъ, съ каждымъ новымъ шагомъ въ развитіи наукъ о природѣ и объ обществѣ выясняется новая

великая роль «числа . Числа, цифры, которыми испещрены статистическія и метеорологическія таблицы, могутъ казаться—для неумѣющихъ читать ихъ—сухимъ и ненужнымъ балластомъ, но для человѣка науки они—драгоцѣнный матеріалъ, основываясь на которомъ наука стремится расширить наше пониманіе явленій природы и общественной жизни, и къ числамъ же должны мы обращаться для того, чтобы на нихъ основать тѣ мѣры, которыя должны избавлять человѣчество въ будущемъ отъ различныхъ грядущихъ бѣдствій, каковы, напримѣръ, неурожаи и многое другоея тому подобное.

Приведенной выдержкой изъ статьи проф. Васильева мы и заканчиваемъ послѣднія страницы этой книги, заключающія отдѣлъ «Отрывковъ изъ теоріи вѣроятностей». Заинтересовавшіеся предметомъ могутъ начать спеціальное его изученіе по указаннымъ уже выше образцовымъ руководствамъ. Къ перечню ихъ необходимо еще добавить *Calcul des Probabilités»* par J. Bertrand («Исчисленіе вѣроятностей» Ж. Бертрана), сочиненіе давно уже нуждающееся въ переводѣ на русскій языкъ. Обширное предисловіе къ этому курсу подъ заглавіемъ «Законы случайнаго» можетъ быть прочтено съ особымъ интересомъ на ряду съ приведенной выше статьей проф. Васильева подъ тѣмъ же заголовкомъ. Кромѣ того рекомендуемъ вниманію читателей: *«Очерки по теоріи статистики»* А. А. Чупрова и *«Элементарную теорію страхованія жизни и трудоспособности»* С. Е. Савича, вышедшую въ 1909 году вторымъ изданіемъ. Между прочимъ, начало послѣдней книги посвящено попыткѣ элементарнаго (сравнительно съ другими курсами) изложенія теоріи вѣроятностей.



ОГЛАВЛЕНІЕ.

